项目一　工程力学

项目概述

本项目以汽车构造为主线，主要从受力分析、拉压、剪切、扭转、弯曲等方面讲述工程力学的内容，使学生掌握汽车常用机械结构件在平衡状态下的受力分析以及实用的计算；了解汽车常用机械结构件应满足的安全性、可靠性、经济性等方面的要求。

工程力学主要包含静力学与材料力学两大部分内容。

1. 在静力学部分，主要学习以下通识性知识：

（1）力的基本概念，常用的公理，四种约束与约束反力的类型。

（2）能正确作受力分析并绘制受力分析图。

（3）在正确作受力分析的基础上，对平面一般力系求合力与运用平衡方程求约束反力。

2. 在材料力学部分，主要学习以下通识性知识：

（1）材料力学的重要基本概念，如内力、应力、杆件的拉压、剪切、扭转与弯曲五种基本变形形式。

（2）了解各构件安全可靠工作必须满足的强度、刚度、稳定性三方面的要求。

（3）五种基本变形的强度条件与强度计算，刚度条件与刚度计算。

学习提示

难点一：工程力学的知识一环扣一环，如约束与约束反力知识→作受力分析→绘制受力分析图→运用平衡方程求解外力→通过外力求物体的内力→求应力→进行强度校核等计算，没有前面知识的铺垫，后面的知识就较难学好。

难点二：工程力学不仅是知识的学习，也是良好学习方法与思维方式培养，整个学习过程中，学生要不断地去思考问题，分析问题并解决问题，而这种能力的培养始终影响着其后续专业课程的学习与职业生涯发展的空间。

对学习的要求：学生能坚持课前预习，认真听课，课余时间还要思考，并完成一定量的习题，不懂之处要勤于请教老师或同学，遇到困难不能绕着走，不能害怕思考问题与分析问题，注重培养分析问题与解决问题的思维和能力。

任务1 物体受力分析、绘制物体受力分析图

学习目标

1. 熟悉力的基本概念和常用公理。
2. 理解约束与约束反力。
3. 掌握汽车常用构件的受力分析，并正确画受力分析图。

导入

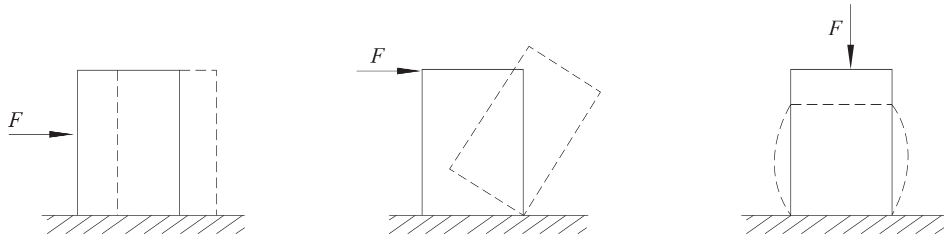
走在城市的马路上，随处可见奔驰的汽车。我们都知道驾驶员起动发动机，变速器挂上前进挡，车就开了，那么汽车是靠发动机直接推动前行的吗？如果不是，汽车又是靠什么前行的呢？这其中包含了哪些力学知识？

知识准备

一、力的基本概念

1. 力的概念

力是物体间相互的机械作用，这种机械作用可以改变物体的运动状态或物体的形状。如图1-1-1所示，使物体运动状态发生变化称为力的外效应；使物体形状发生改变称为力的内效应。前者属于静力学的内容，而后者属于材料力学的内容。



（a）力使物体产生位移　（b）力使物体产生倾翻　（c）力使物体产生变形

图 1-1-1 力作用的结果

实践表明，力对物体的作用效果取决于力的三要素，即力的大小、力的方向和力的作用点位置。这三个要素中，任何一个发生改变，力对物体的作用效果也会为之改变。

力是具有大小和方向的量，因此力是矢量。

力的大小表示物体之间相互作用的强弱程度。在国际单位制中，力的单位为牛（N）或千牛（kN）。

2. 刚体

刚体指受外力作用而不变形的物体。实际上，任何物体在外力的作用下都要发生几何形状的改变，但许多情况下，这些微小的变形在研究物体的平衡问题时常常忽略不计。因为忽略了结构件的变形因素，于是将物体看作是不变形的刚体，使问题的分析及计算得以简化。静力学中所研究的物体均简化为刚体。

3. 平衡与平衡力系

当物体受到一力系作用而相对于地球静止或作匀速直线运动时，则认为该物体处于平衡状态。作用于该物体上的力系，称为平衡力系。物体的运动是绝对的，而静止是相对的，以地球为参照系，机件的平衡状态指机件处于静止状态或作匀速直线运动，反之，如果机件是静止的或作匀速直线运动，则机件处于平衡状态。

4. 力系

作用于同一物体上两个力或两个以上的力称为力系。

各力的作用线在同一平面内的力系称为平面力系；不在同一平面内的力系称为空间力系；各力的作用线能相交于一点的力系称为汇交力系；各力的作用线相互平行的力系称为平行力系；各力的作用线既不相交于一点又不相互平行的力系称为任意力系。

如果作用于物体的力系可以用另一力系来代替而且效果相同，那么这两个力系互称等效力系。

如果物体在某一力系作用下，其运动状态不变，则称此力系为平衡力系。

二、静力学公理

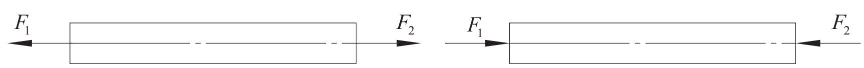
静力学公理是人类在长期生活和生产实践中积累的经验总结，经过实践的反复检验证明是符合客观实际的，是建立静力学理论的基础。

公理一　二力平衡公理

作用在同一刚体上的两个力，使刚体保持平衡状态的充分和必要条件是：这两个力大小相等、方向相反、且作用在同一条直线上（等值、反向、共线）。

二力平衡公理揭示了作用于物体上最简单的力系平衡时所必需满足的条件，如图1-1-2所示。用矢量式表示为：

$$F_1 + F_2 = 0$$



（a）受拉杆　　（b）受压杆

图 1-1-2 二力平衡

说明：在工程上只受两个力作用且不计自重而平衡的刚体，称为二力构件或二力杆。二力构件平衡时，这两个力的作用线必定沿着两个力作用点的连线，且这两个力大小相

等，方向相反。如图1-1-3所示，当杆CD不计自重时为二力杆或二力构件。

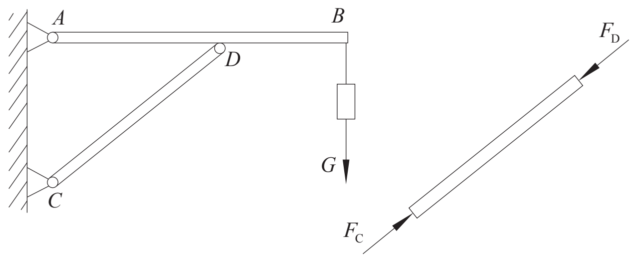
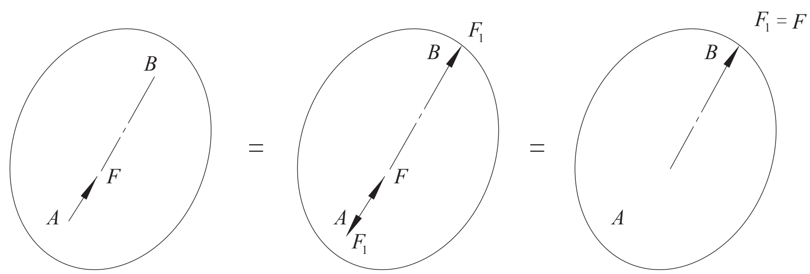


图 1-1-3 二力杆或二力构件

在作构件受力分析时，应首先判断是否存在二力构件，使问题的分析与计算得以简化。

公理二　加减平衡力系公理

在刚体上已知作用有任意力系时，若再加上或减去任意平衡力系后，并不改变原有力系对刚体的作用效应，即与原有力系等效，如图1-1-4所示。



（a）刚体上作用力F　（b）同时加上一对力F_1（c）同时减去一对力F与F_1

且$F = F_1$则（a）、（b）与（c）等效

图 1-1-4 加减平衡力系

说明：作用于刚体上的力，可以沿着其作用线任意移动，而不改变力对刚体作用的外效应，即力的可传递性原理。如图1-1-5所示。设作用于刚体上A点的力为F，在力的作用线上任取一点B，按公理二，在B点沿力的作用线加上一对相互平衡的力F_1和F_2，且$F = F_1 = F_2$，则这样不改变力F对刚体作用的效应。同时看到，由F、F_1、F_2组成的力系中，F与F_1也是一对平衡力系。按公理二去除这对平衡力系，仍不改变力F_2对刚体作用的效应。于是可知F_2与F对刚体作用的效应相同，即F_2与F具有相同的作用线、相同的大小和相同的方向。这就相当于把作用于A点的力F沿着作用线移到了任取的B点的力F_2。

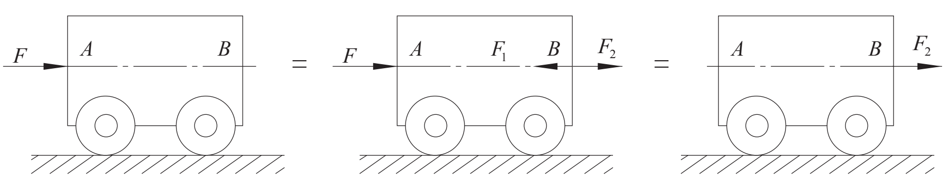


图 1-1-5 力的可传递性

公理三　力的平行四边形法则

作用在一个物体上同一点的两个力，可以合成为作用于该点的一个合力，合力的大

小与方向由这两个力为邻边所构成的平行四边形的对角线确定，这称为力的平行四边形法则，如图1-1-6所示。

图1-1-6所示中，F_1与F_2为作用于O点的两个力，以这两个力为邻边构成平行四边形$OACB$，对角线OC为F_1与F_2的合力F_R，用矢量式表示：$F_R = F_1 + F_2$。

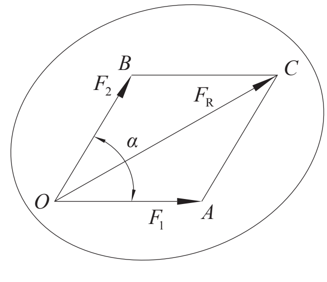


图 1-1-6 力的合成

公理四 作用力与反作用力公理

两个物体间的作用力与反作用力总是大小相等、方向相反，沿着同一直线，但分别作用在两个物体上。

注意：公理一与公理四的区别。公理四作用力与反作用力等值、反向、共线但作用在两个物体上，而公理一为等值、反向、共线但作用在同一刚体上的两个力。

三、约束与约束反力

如果物体在任何方向的运动都不受限制，这种物体称为自由体，而运动受到限制的物体称为非自由体。限制物体运动的其他物体称为约束，如汽车发动机活塞只能在气缸内作往复直线运动，活塞为非自由体，气缸则为活塞的约束。

因为约束限制物体的运动，使其沿某些方向的运动受阻，从而使物体的运动状态得到改变，所以约束的作用实际上就是一种力的作用。因此，物体受的力一般可分为两类：凡能主动引起物体运动状态改变或使物体运动状态有改变趋势的力，称为主动力，如物体受的重力、拉力、推力等。凡来自约束而对物体的运动起限制作用的力称为约束反力，如地脚螺栓、轴承、绳索和撑架等对物体约束的力。一般情况下主动力的大小和方向是已知的，而约束反力的大小和方向则是未知的，但往往又是所要求的。约束反力取决于主动力的作用情况和约束的形式。约束反力的方向总是和该约束所能阻碍的运动方向相反。

下面介绍工程上常见的几种约束类型。

1．柔性体约束及受力分析

由绳索、钢丝、链条、传动带等所形成的约束称为柔性约束。柔性约束阻碍物体沿柔性体伸长方向运动，但不能阻止物体其他任何方向的运动。所以柔性体本身仅能承受拉力，其约束反力作用于联接点，方向沿柔性体而背离物体，如图1-1-7、图1-1-8所示。

图1-1-7所示的带传动中，柔性体传动带的约束反力沿轮缘切线方向。设图中的小带轮为主动轮，进入小带轮的传动带为紧边，脱离小带轮的传动带为松边，紧边的拉力T_{r1}和T'_{r1}等值、反向、共线，松边的拉力T_{r2}和T'_{r2}也等值、反向、共线。图中T_{r1}、T'_{r1}、T_{r2}、T'_{r2}均为约束反力。

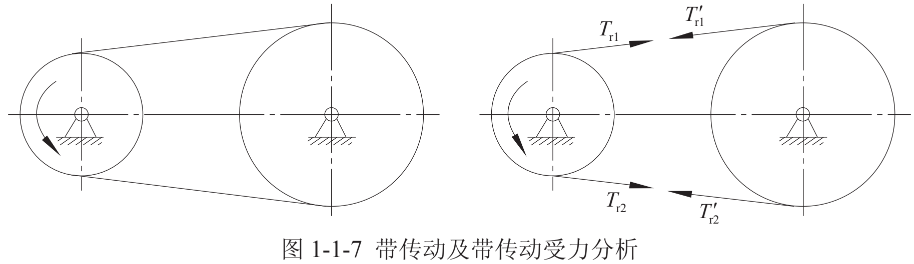


图 1-1-7 带传动及带传动受力分析

图1-1-8所示的起吊重物时，链索AB、AC、AD在重物重力作用下均受到拉力，链索AB、AC作用于重物B、C点的拉力为F_B、F_C，作用于节点的拉力为F'_B、F'_C、F_D，图中F_B、F_C、F'_B、F'_C、F_D均为约束反力。

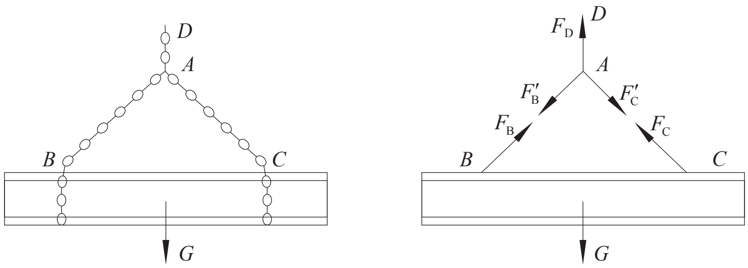


图 1-1-8 起吊重物及起吊重物时的受力分析

2. 光滑接触面约束及受力分析

两个互相接触的物体，若略去摩擦不计，接触面为理想的光滑面，这类约束限制了物体沿接触面法线方向的运动，称为光滑面约束。在光滑面接触的约束中，约束反力的方向为沿接触面的公法线并且指向被约束的物体。如图1-1-9所示为光滑面接触的约束及受力分析，图中F_N为约束反力。

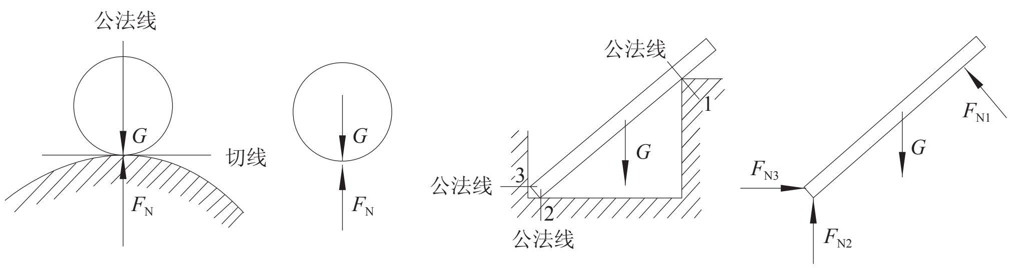


图 1-1-9 光滑面接触的约束及受力分析

3. 光滑铰链约束及受力分析

两个带有圆孔的物体，用光滑圆柱形销钉相连接。受约束的两个物体都只能绕销钉轴线转动，称为圆柱形铰链约束，销钉对被连接的物体沿垂直于销钉轴线方向的移动形成约束，不能限制物体绕圆柱销轴线的转动和平行于圆柱销轴线的移动，如图1-1-10所示。

由于圆柱销与圆柱孔是光滑曲面接触，则约束反力应是沿接触线上的一点到圆柱销中心的连线上，垂直于轴线，但因为接触线的位置不能预先确定，因而约束反力的方向也不能预先确定。通常把它分解为x方向和y方向的两个互相垂直的约束反力，用F_x和F_y表示，如图1-1-10所示。

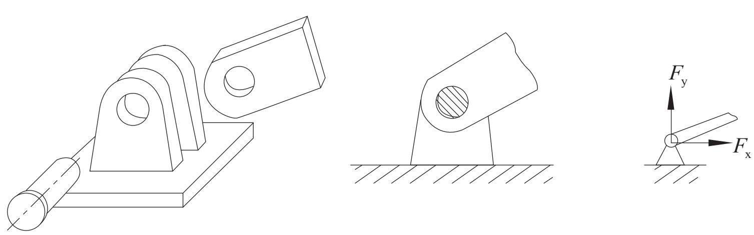


图 1-1-10 光滑铰链约束及受力分析

圆柱铰链约束在工程上应用广泛，常见的有以下几种：

（1）固定铰链支座约束

如图1-1-10所示，由一个固定底座和一个构件用销钉联接而成，称为固定铰链支座。支座的约束反力用相互垂直的两个分力F_x和F_y表示。

（2）中间铰链约束（铰链连接）

如图1-1-11所示，两个相同圆孔的物体，用销钉连接起来，构成铰链连接，约束反力也用相互垂直的两个分力F_x和F_y表示。

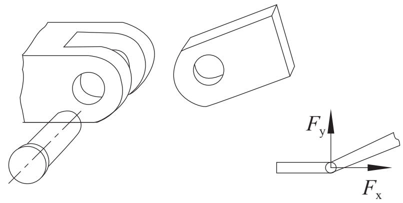


图 1-1-11 中间铰约束及受力分析

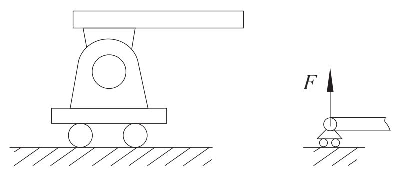


图 1-1-12 活动支座铰链约束及受力分析

（3）活动铰链支座约束

如图1-1-12所示，在固定铰链支座的底部安装滚轮，形成活动铰链支座约束。工程中考虑温度变化引起约束力，常用于桥梁、行车等结构。活动铰链支座的约束反力垂直于支承面并通过铰链中心。

四、物体的受力分析与受力图

解决静力学问题时，首先要明确研究对象，分析它的受力情况，确定哪些是已知的，哪些是未知的，作出受力分析图，然后建立相应的平衡方程进行计算。

为了清楚地表达出某个物体的受力情况，首先应将它从与其相联系的周围物体中分离出来，分离的过程就是解除约束的过程。在解除约束的地方用相应的约束反力来代替约束的作用，被解除约束后的物体称为分离体。在分离体上画出物体所受的全部主动力和约束反力，此图称为研究对象的受力分析图，整个过程就是对所研究的对象进行受力分析。正确画出研究对象的受力分析图是受力分析的关键。

画受力分析图，一般按以下步骤进行：

（1）确定研究对象，解除约束，画分离体

按问题的条件和要求，确定所研究对象（它可以是一个物体，也可以是几个物体的组合或整个系统，也可以是某个节点），解除与研究对象相连接的其他物体的约束，用简单几何图形表示出其形状特征。

（2）画主动力

在分离体上画出该物体所受到的全部主动力。

（3）画约束反力

在解除约束的位置，根据约束的不同类型，画出约束反力。

【例1-1-1】 对如图1-1-13（a）所示处于静止状态的车辆作受力分析。

（a）静止状态的车辆　　　　　　　　（b）受力分析图

图 1-1-13 静止状态车辆的受力分析

解：（1）取车辆为研究对象，画出分离体。

（2）分析车辆受重力G与地面对车辆支撑力（约束反力）F_{N1}、F_{N2}的作用而处于平衡状态。

（3）画出车辆受力分析图，如图1-1-13（b）所示。

若如图1-1-13（a）所示车辆在平地上作匀速直线行驶，受力分析图又是怎样呢？

（1）思考：车辆在平地上作匀速直线行驶，则车辆在各个力的作用下也处于一种平衡状态。

（2）取车辆为研究对象，画出分离体。

（3）分析：车辆受重力G与地面对车辆支撑力（约束反力）F_{N1}、F_{N2}的作用。车辆还受到来自发动机输出的动力，通过传动系驱动车轮转动，该转动的力矩使轮胎产生沿地面向后的作用力F_O，同时地面给驱动轮一反作用力即推动车辆前进的驱动力F_t。车辆还受到滚动阻力F_f、空气阻力F_w作用。车辆在上述各个力的作用下处于平衡状态。

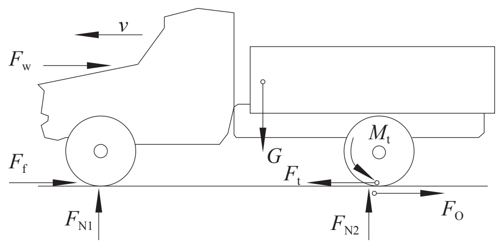
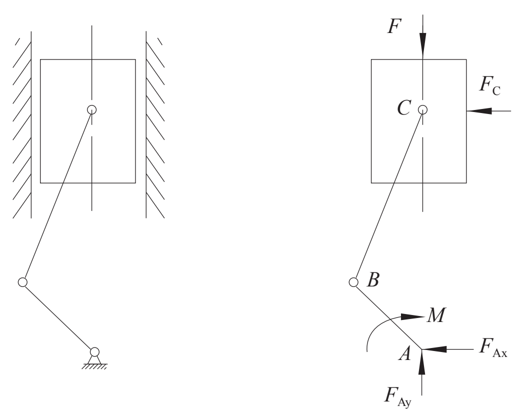


图 1-1-14 匀速直线运动状态车辆的受力分析

（4）画出车辆受力分析图，如图1-1-14所示。

想一想：在图1-1-14中哪些是主动力？哪些是约束反力？哪些是作用力与反作用力？

【例1-1-2】对图1-1-15（a）所示的活塞连杆机构（在发动机作功冲程时）作受力分析（假设系统处于平衡状态），绘制受力图。



（a）平衡状态的活塞连杆机构　（b）受力分析图

图 1-1-15 活塞连杆机构的受力分析

解：（1）以活塞连杆机构整体为对象作受力分析。

（2）燃料燃烧对活塞顶部产生压力F。

（3）将活塞的约束气缸套去除，加上约束反力F_C。

（4）将曲轴轴承处约束去除，加上约束反力F_{Ax}、F_{Ay}。

（5）车辆行驶与传动系产生的阻力M。

（6）绘制机构的受力图，如图1-1-15（b）所示。

想一想：机件的自重是漏画还是忽略了，如果是忽略，忽略的依据是什么？

【例1-1-3】 如图1-1-16（a）所示，梁AB两端用固定铰链支座和活动铰链支座支承，在C、D处作用力F_C、F_D，梁的自重不计，试画出梁AB的受力图。

解：（1）以梁AB为对象，画梁AB的分离体图。

（2）在梁AB标上主动力F_C、F_D。

（3）解除A处固定铰链支座的约束，在A点处标上约束反力F_{Ax}、F_{Ay}。

（4）解除B处活动铰链支座的约束，在B点处标上约束反力F_B，方向垂直于光滑接触面，并指向梁AB。

（5）梁AB受力分析图如图1-1-16（b）所示，梁AB受到主动力F_C、F_D和约束反力F_{Ax}、F_{Ay}、F_B作用而平衡。

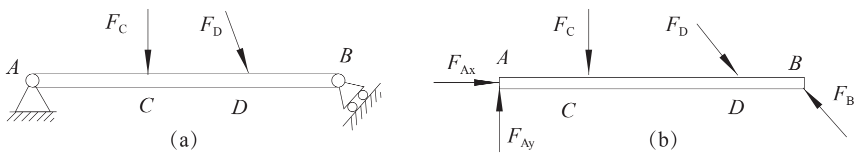


图 1-1-16 梁AB的受力分析

任务小结

绘制机件的受力分析图在工程力学中非常重要，前面需要有力的基本概念、力学的公理、定理，约束与约束反力等知识铺垫，又为后面知识的学习打基础。

画受力图的关键：

（1）确定研究对象。首先要明确画哪个物体的受力图，然后把与它相联系的一切约束去掉，将它单独画出来。

（2）画受力分析图，“力”不能多画也不能漏画，凡与其他物体相连接之处，一般都受到力的作用。

（3）按约束类型和约束性质来确定约束反力。什么样的约束必定产生什么样约束反力，所以必须清楚地掌握各种约束的性质。

（4）注意作用力与反作用力的关系。作用力的方向一旦确定，反作用力的方向必定与它相反，不能随意设。此外，在以几个物体构成的物体系统（整体）为研究对象时，系统内部各物体间成对出现的相互作用力不必画出来。

（5）画受力图时，优先找出二力杆或二力构件，画出它的受力图，然后再画出其他物体的受力图。

测试题

一、选择题

1. 静力学把物体看作刚体，是因为（ ）。

A. 物体受力不变形　　B. 物体的硬度很高

C. 抽象的力学模型　　D. 物体的变形很小

2. 下列结论中（ ）是不正确的。

A. 外力是作用在物体外部的力　　B. 杆件的自重不属于外力

C. 支座约束反力不属于外力　　D. 运动杆件的惯性力不属于外力

3. 二力平衡公理适用于（ ）。

A. 一个刚体　　B. 两个刚体　　C. 变形体　　D. 固体

4. 如图1-1-17所示，圆轮重为 G，置于 A 和 B 面上，在不考虑摩擦的情况下，圆轮的受力分析图应该是（ ）。

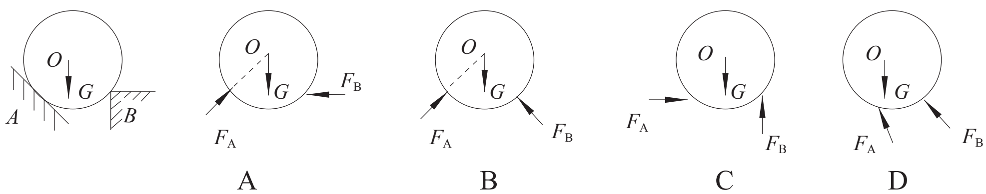


图 1-1-17

5. 刚体受三个力作用并处于平衡状态，则此三力的作用线（ ）。

A. 必汇交于一点　　B. 必相互平行　　C. 必相互垂直　　D. 必都为零

二、判断题

1. 物体间相互的机械作用，总是大小相等、方向相反、作用线相同，且作用在同一物体上。（ ）
2. 物体在等值反向共线的二力作用下一定处于平衡状态。（ ）
3. 作用于刚体的力可沿其作用线移动，而不改变原力对刚体的外效应。（ ）
4. 仅作用两个力，又处于平衡状态的构件是二力构件。（ ）
5. 作用力与反作用力等值、反向、共线，所以作用力与反作用力相互平衡。（ ）
6. 静力学公理中，二力平衡公理和加减平衡力系公理仅适用于刚体。（ ）
7. 一个物体在力系作用下处于平衡状态，这种力系称为平衡力系。（ ）
8. 柔性约束只能承受拉力，不能承受压力。（ ）
9. 凡是处于平衡状态的物体，相对于地球都是静止的。（ ）
10. 画受力图时，铰链约束的约束反力可以假定其指向。（ ）

三、画受力分析图

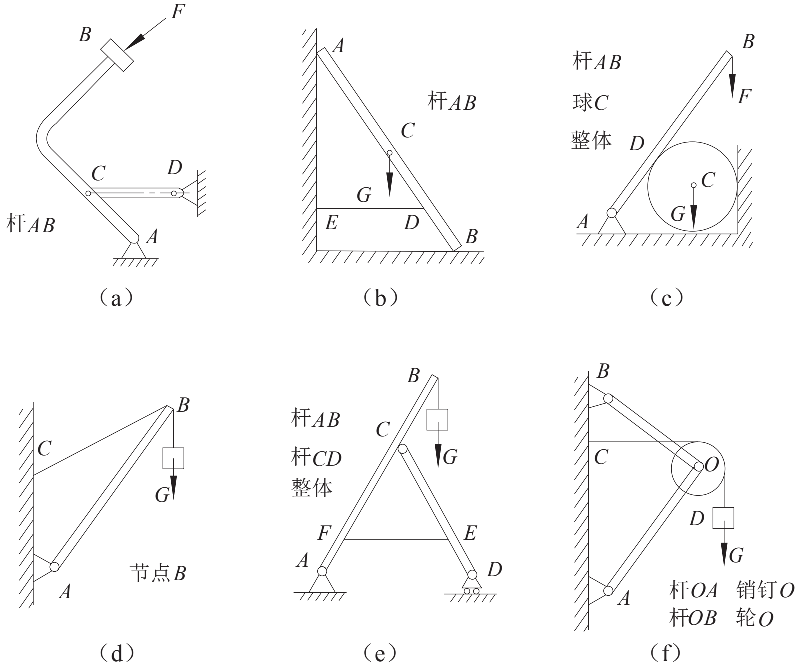


图 1-1-18

任务2 平面力系与平衡方程应用

学习目标

1. 掌握平面汇交力系求合力与平衡方程应用。
2. 掌握平面力偶系的平衡方程应用。
3. 掌握平面任意力系的平衡方程应用。

导入

如图1-2-1所示的常见工程车辆（汽车起重机），已知车重G_1，最大起吊重量G_2及车辆尺寸。在车辆上有一配重G_3，该配重既不能太重（过重会使车辆空载时绕后轮顺时针转动倾翻）也不能太轻（太轻会使车辆尚未达到最大起吊重量就产生绕前轮逆时针转动倾翻），那么如何确定合适的配重G_3才能保证车辆在空载或达到最大起吊重量时不会产生倾翻呢?

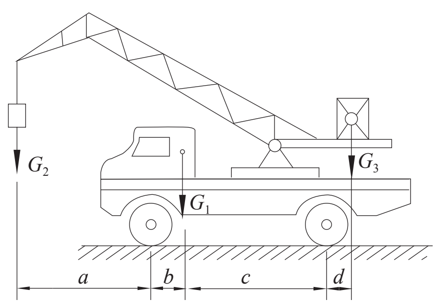


图 1-2-1 汽车起重机

知识准备

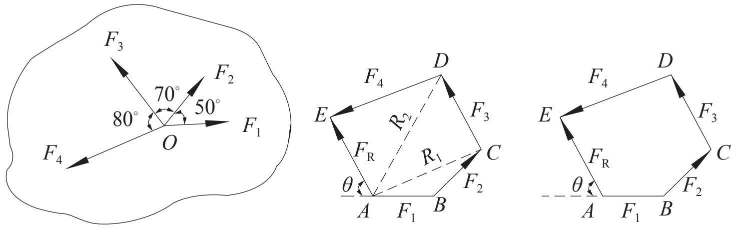
一、平面汇交力系的合成与平衡方程应用

1. 平面汇交力系的合成

如图1-2-2（a）所示，在物体O点作用有力F_1、F_2、F_3、F_4，组成平面汇交力系，求合力F_R的大小和方向。

根据公理三，两个汇交力合成时的合力，可以由两个力所组成的平行四边形对角线来

确定，将 F_1、F_2 组成合力 R_1，将 F_3、R_1 组成合力 R_2，依次得到合力 F_R。用几何法作图求合力 F_R 的过程与合力 F_R 大小和方向如图1-2-2（b）所示。



（a）平面汇交力系 （b）几何法作图求合力 F_R

图 1-2-2 几何法求平面汇交力系的合力 F_R

结论：平面汇交力系可以合成为一个合力，合力的大小等于力系中各力的矢量和，即 $F_R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$。

推广：由n个力组成的平面汇交力系，合力可写成 $F_R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \Sigma F$。

2. 平面汇交力系平衡的几何条件

平面汇交力系可以合成为一个合力 F_R，说明 F_R 与原力系等效。如果在该力系加上一个力 F_R'，满足 F_R' 与 F_R 等值、反向、共线，根据二力平衡公理可知，物体处于平衡状态，即 F_1、F_2、F_3、F_4、F_R' 为平衡力系，由几何法作图可知，力 F_1、F_2、F_3、F_4、F_R' 形成首尾相连的封闭的多边形，即合力为零。

结论：平面汇交力系若平衡，则力形成封闭的多边形，平面汇交力系的合力等于零，即$F_R = F_1 + F_2 + \cdots + F_n = \Sigma F = 0$。

3. 解析法求合力 F_R

如图1-2-3所示，设力 F 作用于物体的 A 点，在力 F 作用线所在的平面内取直角坐标系 xOy，将力 F 分别向 x 轴与 y 轴投影得 F_x、F_y，显然

力在 x 轴上的投影：$F_x = F\cos\alpha$

力在 y 轴上的投影：$F_y = F\sin\alpha$

式中 α 为力 F 与 x 轴的夹角。

一般规定：力的投影方向与 x 轴（或 y 轴）正向相同时为正值，反之为负值。

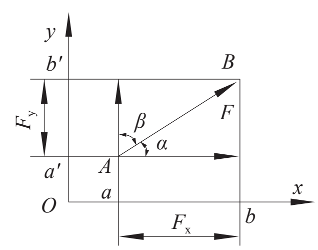


图 1-2-3 力F在直角坐标系上的投影

当已知力 F 在 x 轴、y 轴上的投影 F_x、F_y 时，由几何关系也可求出力 F 的大小和方向。

$$F = \sqrt{F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2}} \qquad \tan\alpha = \left|\frac{F_y}{F_x}\right|$$

如图1-2-4所示平面汇交力系，用解析法求该力系 F_1、F_2、F_3、F_4 的合力。

将各力向 x 轴投影，在 x 轴的合力为：$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x}$

将各力向 y 轴投影，在 y 轴的合力为：$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$

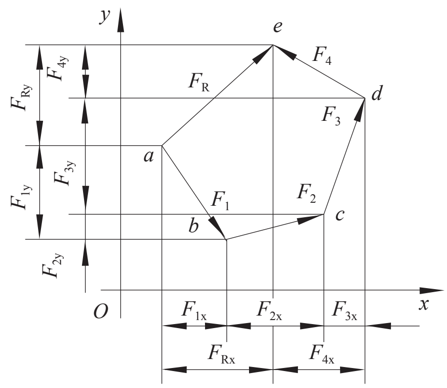
推广：由n个力组成的平面汇交力系

将各力向 x 轴投影，在 x 轴上的合力为：$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y}$

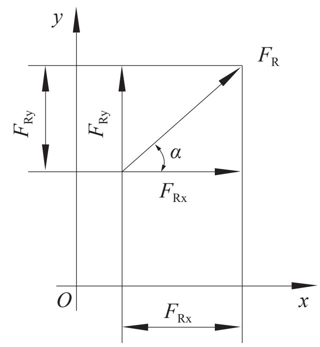
将各力向 y 轴投影，在 y 轴上的合力为：$F_{Ry}=F_{1y}+F_{2y}+\cdots+F_{ny}=\Sigma F_y$

所以合力的大小和方向为

$$F_R=\sqrt{F_{Rx}^2+F_{Ry}^2}=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2} \qquad \tan\alpha=\left|\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right|=\left|\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}\right|$$



（a）各力在直角坐标系上的投影



（b）合力 F_R 在直角坐标系上的投影

图 1-2-4 平面汇交力系在直角坐标系上的投影

4. 平面汇交力系的平衡及平面汇交力系平衡方程的应用

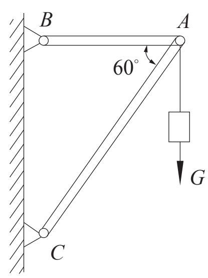
由前述几何法可知，平面汇交力系平衡的充分必要条件是力系的合力等于零。

要使 $\Sigma F_R=0$；必须是

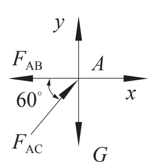
$$\begin{cases}\Sigma F_x=0\\ \Sigma F_y=0\end{cases} \tag{1-2-1}$$

上式说明，力系中各力在每个坐标轴上投影的代数和都等于零。该式也称为平面汇交力系的平衡方程。这是两个独立的方程，可以求解两个未知量。

【例1-2-1】如图1-2-5（a）所示，支架在销 A 上悬吊重物 G，求杆 AB 和杆 AC 所受的力，杆 AB 和杆 AC 的自重不计。



（a）支架



（b）以销A为对象的受力分析图

图 1-2-5

解：（1）分析：杆AB、杆AC和重物G组成一平衡系统，杆AB和杆AC均为二力杆；

（2）以销A为对象作受力分析如图1-2-5（b）所示；

（3）列平衡方程，求杆AB和杆AC所受的力F_{AB}、F_{AC}。

$$\begin{cases}\Sigma F_x = 0 & F_{AC}\cos 60^\circ - F_{AB} = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & F_{AC}\sin 60^\circ - G = 0\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}F_{AB} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}G \approx 1.15G \\ F_{AC} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}G \approx 0.58G\end{cases}$$

二、力矩、力偶、平面力偶系的平衡方程应用

1. 力矩的概念与计算

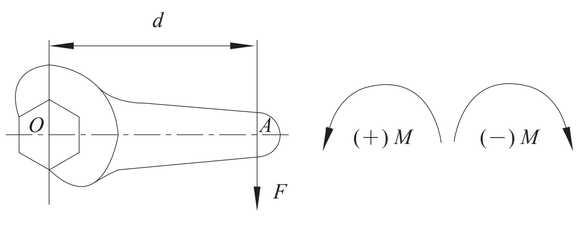
在实际生活中，力对物体的作用还会使物体产生转动。如图1-2-6（a）所示，用扳手拧螺母，力 F 能使扳手和螺母绕螺母中心 O 转动。这种转动效应与力 F 的大小有关，还与转动中心 O 点到力 F 作用线的垂直距离 d 有关，将它们的乘积用来度量平面力 F 对点 O 之矩，简称力矩，即

$$M_O(F) = \pm Fd \tag{1-2-2}$$

式中d称为力臂，转动中心 O 点称为矩心。

力矩正负值规定：产生逆时针转动效应的力矩取正值，顺时针转动效应的力矩取负值，如图1-2-6（b）所示，力矩的单位为N·m或kN·m。

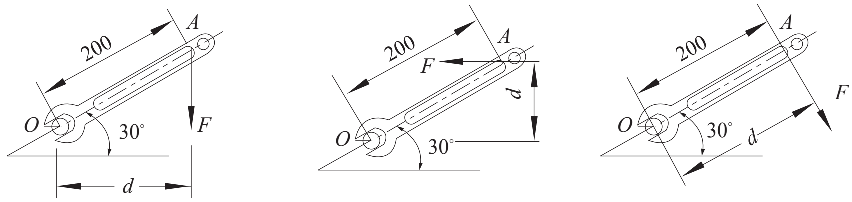
如图1-2-6（a）所示的力矩为顺时针转动时，其值为 $M_O(F) = -Fd$ 。



（a）　　　　（b）

图1-2-6 力矩

【例1-2-2】如图1-2-7所示，数值相同的三个力按照不同的方式施加在同一扳手的A端。若 $F = 200\text{N}$ ，试求图示三种情况下力 F 对 O 点的力矩。



（a）　　　　（b）　　　　（c）

图 1-2-7

解：在图1-2-7所示三种情况下，虽然力的大小、作用点和矩心均相同，但是力的作用线各异，致使力臂均不相同，因而在三种情况下，力 F 对 O 点之矩不同。直接根据力矩的

公式可求出力 F 对点 O 之矩分别为：

在图1-2-7（a）中$M_O(F)=-F\times d=-200\text{N}\times 0.2\text{m}\times\cos 30^\circ=-34.64\text{N}\cdot\text{m}$；

在图1-2-7（b）中$M_O(F)=F\times d=200\text{N}\times 0.2\text{m}\times\sin 30^\circ=20\text{N}\cdot\text{m}$；

在图1-2-7（c）中$M_O(F)=-F\times d=-200\text{N}\times 0.2\text{m}=-40\text{N}\cdot\text{m}$。

2. 力偶的概念与计算

在生产实践中经常遇到某物体受到大小相等、方向相反但不共线的两个平行力作用，如图1-2-8所示，驾驶员用双手操纵方向盘，由这两个力所组成的力系称为力偶。

力偶对刚体产生的转动效应，用力偶矩M来度量，即

$$M=\pm Fd \qquad (1\text{-}2\text{-}3)$$

式中 d 为两个力作用线之间的垂直距离，称为力偶臂。

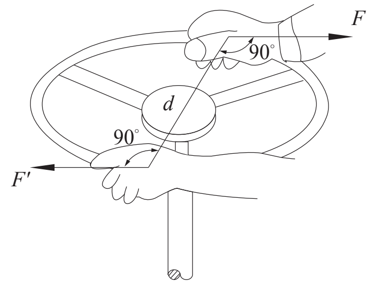


图 1-2-8 力偶

力偶正负值规定：产生逆时针转动效应的力偶取正值，顺时针转动效应的力偶取负值，力偶的单位为N・m或kN・m，同力矩。

力偶的性质：

（1）力偶对任何轴的投影都等于零。力偶没有合力，它不能用一个力来代替，也不能用一个力来平衡，只能用反向的力偶来平衡。

（2）力偶对其所在平面内任一点的力矩都等于一个常量，与矩心的位置无关。

（3）作用在刚体内同一平面上的两个力偶相互等效的条件是：两个力偶矩的大小相等，转向相同，如图1-2-9所示。因此在生产实际中，可以通过同时改变力偶中力的大小和力偶臂的长短，而不改变它对刚体的转动效应，如同样的力偶作用，转动大直径方向盘比转动小直径方向盘要省力。

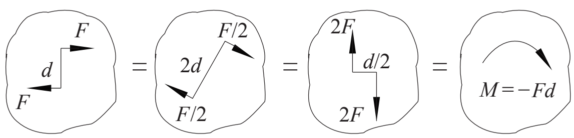


图 1-2-9 两个力偶的等效

3. 平面力偶系的合成与平衡

（1）平面力偶系的合成

作用在物体同一平面内有多个力偶，称为平面力偶系，平面力偶系合成的结果是一个合力偶，其合力偶矩的大小等于力偶系中各力偶矩的代数和，合力偶矩用 M_R 表示，即

$$M_R=M_1+M_2+\cdots+M_n=\Sigma M$$

（2）平面力偶系的平衡方程

物体上作用有平面力偶系，如果力偶系中各力偶对刚体作用的外效应互相抵消，即合力偶矩 M_R 等于零，则物体处于平衡状态。因此平面力偶系平衡的必要与充分条件是力偶系中各力偶的代数和等于零，即

$$\Sigma M=0 \qquad (1\text{-}2\text{-}4)$$

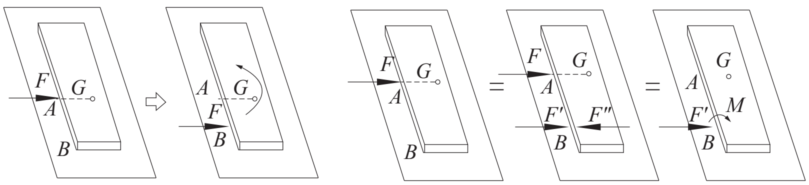
三、平面任意力系的简化

在工程实际中，经常遇到平面任意力系的问题，即作用在物体上的力都分布或近似地分布在同一平面内，但它们的作用线是任意分布的。这些力组成的力系即为平面任意力系。

1. 力向一点平移

前面提过，作用在刚体上的力可以沿其作用线任意移动，而不改变力对刚体作用的外效应。但是，当力平行于原来的作用线移动时，便会改变对刚体的外效应。

如图1-2-10（a）所示，观察作用在刚体上 A 点的力 F 。当将它直接平行移动到 B 点时刚体会产生逆时针的转动。



（a）力向一点平移产生的结果　（b）力向一点平移并能保持原有状态

图 1-2-10 力向一点平移

为了使力 F 从A点平移到B点，并且刚体仍保持原有状态，则应该作用一顺时针转动的力偶矩。其分析过程如图1-2-10（b）所示，在B点加一对大小相等、方向相反，且与力F平行的力F'和F''，并使$F=F'=F''$；根据加减平衡力系公理，力系F、F'和F''对刚体的作用与原来力F对刚体的作用等效；在力F、F'和F''中，F和F''组成一个力偶，用M表示；因此，作用于刚体上A点的力F平行移至B点后，变成一个力F'和一个力偶M，而且刚体仍保持原有状态，力平移后其力偶矩M等于F对B点之矩，即

$$M=M_{\mathrm{B}}(F)=F\times L$$

式中 L 为力 F 对于 B 点的力臂。

上述结果可以推广为一般结论：作用在刚体上的力，可以平行移动到刚体上的任意一点，但必须同时附加一个力偶，其力偶矩的大小等于原来的力对新作用点之矩。反之，在平面内的一个力和一个力偶，也可以用一个力来等效替换。

想一想： 钳工在攻螺纹时，为什么忌用单手操作，而必须同时用两手握扳手，还要用力相等均匀？

2. 平面任意力系的简化

如图1-2-11（a）所示，设刚体上作用一个平面任意力系 F_1 、F_2 、F_3 ，……，F_n ，在力系的作用面内任意取一点 O ，O 点称为简化中心。

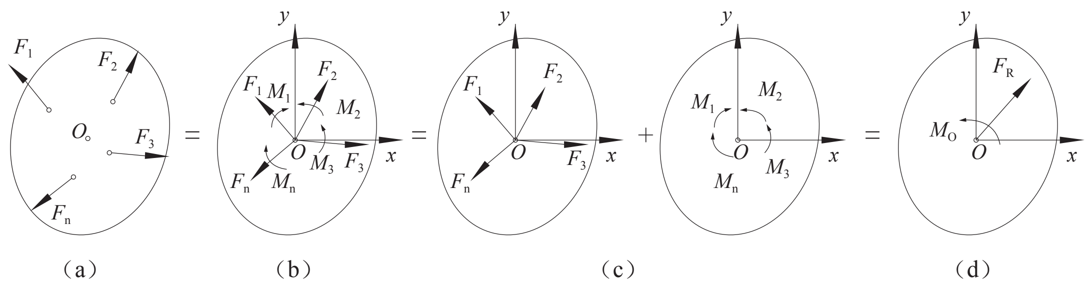


图 1-2-11 平面任意力系的简化

如图1-2-11（b）所示，应用力向一点平移的方法，将力系中的每一个力 F_1、F_2、F_3，……，F_n 向简化中心 O 点平移；其结果是如图1-2-11（c）所示，得到一个平面汇交力系和一个平面力偶系，其中平面汇交力系中各个力的大小和方向分别与原力系中对应的各个力相同，但作用线互相平行，而平面力偶系中各个力偶的力偶矩分别等于原力系中各个力对简化中心的力矩。

将图1-2-11（c）所示的平面汇交力系和平面力偶系，分别合成一合力 F_R 和一合力偶 M_O，如图1-2-11（d）所示。

F_R 称为原力系的主矢，为简化后平面汇交力系各力的矢量和，即

$$F_R = F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = \sum_{i=1}^{n} F_i$$

M_O 称为原力系对简化中心的主矩，是各附加力偶的力偶矩的代数和，也等于原力系中所有力对简化中心之矩，即

$$\begin{aligned} M &= M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_n = \Sigma M \\ &= M_O(F_1) + M_O(F_2) + M_O(F_3) + \cdots + M_O(F_n) = \Sigma M_O(F) \end{aligned}$$

将 F_{Rx} 和F_{Ry}分别表示为主矢 F_R 在 x 轴和 y 轴上的投影，则：

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \cdots + F_{nx} = \Sigma F_x$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \cdots + F_{ny} = \Sigma F_y$$

上式表示，平面任意力系的主矢 F_R 在 x 轴和 y 轴上的投影等于力系中各个力在x轴和y轴上投影的代数和，也就是说若已知力系中各个力在 x 轴和 y 轴上投影的代数和，能很容易求得主矢 F_R 的大小和方向。

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2} \qquad \tan\alpha = \left|\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}\right| = \left|\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}\right|$$

综上所述，可得如下结论：平面任意力系向作用面内任一点 O 简化，可以得到一个力和一个力偶。该力作用于简化中心 O，其大小及方向等于原力系的主矢；该力偶之矩等于原力系对简化中心的主矩。

由于主矢只是原力系的矢量和，它完全取决于原力系中各力的大小和方向，因此，主矢与简化中心的位置无关，而主矩等于原力系中各力对简化中心之矩的代数和，选择不同位置的简化中心，各力对它的力矩也将改变，因此，主矩与简化中心的位置有关，故主矩 M_O 右下方标注简化中心的符号。

力系向一点平移这样简化的方法适用于任何复杂力系。

3. 固定端约束

如图1-2-12（a）所示，固定端约束是一种常见约束，如深埋电线杆的基部、建筑物的根部等都属于固定端约束。固定端约束的特点是既限制物体的移动又限制物体的转动。固定端处受力分布比较复杂，接触面上产生分布的约束力系，但如果主动力为平面力系，这一分布约束力系也是平面力系，如图1-2-12（b）所示。在平面问题中，利用力系向一点简化的方法，将这一分布力系向作用平面内 A 点简化，可得到一约束反力和一约束力偶。因约束反力的方向预先无法判断，通常用互相垂直的两个分力 F_{Ax} 和 F_{Ay} 表示。所以固定端约束用 F_{Ax} 、F_{Ay} 、M_{A} 表示，如图1-2-12（c）所示。

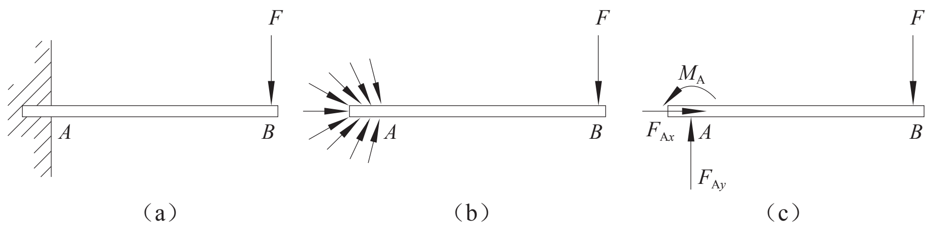


图 1-2-12 固定端约束力及简化

四、平面任意力系平衡方程及应用

平面任意力系简化后的结果是：分解为一个平面汇交力系和一个平面力偶系。

如果平面任意力系使物体处于平衡，则平面汇交力系使物体处于平衡，平面力偶系使物体处于平衡。所以平面任意力系平衡的充分和必要条件是：“力系的主矢为零，力系的主矩为零”。平面任意力系平衡的解析条件为

$$\begin{cases} \Sigma F_{\mathrm{x}} = 0 \\ \Sigma F_{\mathrm{y}} = 0 \\ \Sigma M_{\mathrm{O}}(F) = 0 \end{cases} \qquad （1\text{-}2\text{-}5）$$

上式也称为平面任意力系的平衡方程。

【例1-2-3】 如图1-2-13（a）所示悬臂梁，已知 $L = 2\mathrm{m}$ ，F=100N ，求固定端 A 处的约束反力。

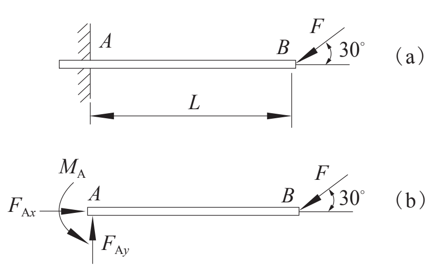


图 1-2-13

解：（1）取梁 AB 为研究对象，画出 AB 梁的受力图，如图1-2-13（b）所示。

（2）列平衡方程求 F_{Ax}、F_{Ay}、M_A。

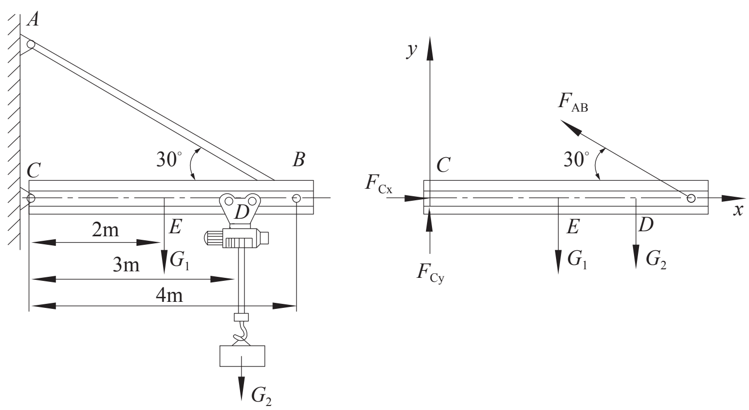
$$\Sigma F_x = 0 \qquad F_{Ax} - F\cos 60^\circ = 0$$
$$\Sigma F_y = 0 \qquad F_{Ay} - F\sin 30^\circ = 0$$
$$\Sigma M_O(F) = 0 \qquad M_A - FL\sin 30^\circ = 0$$

（3）解平衡方程，求出未知量，联立求解平衡方程得：

$$F_{Ax} = 86.6\text{N}$$
$$F_{Ay} = 50\text{N}$$
$$M_A = 100\,\text{N} \cdot \text{m}$$

说明：若计算结果为正，说明各未知力的实际方向均与假设方向相同。若计算结果为负，则未知力的实际方向与假设方向相反。

【例1-2-4】如图1-2-14（a）所示的吊车，横梁 BC 重 $G_1 = 2\text{kN}$，拉杆 AB 自重不计，两杆之间的角度 $\angle ABC = 30^\circ$，电动葫芦 D 连同重物共重 $G_2 = 6\text{kN}$。吊车各尺寸如图所示，试求拉杆 AB 所受的拉力和铰链 C 处的约束反力。



（a）吊车　　（b）以杆 AB 为对象作受力分析图

图 1-2-14

解：（1）分析：作用于横梁BC上的力有横梁 BC 的中点有重力 G_1，电动葫芦 D 连同重物的载荷 G_2，拉杆 AB（二力杆）的拉力 F_{AB}，铰链C处的约束反力 F_{Cx}、F_{Cy}，系统处于平衡状态。

（2）选取横梁 BC 为研究对象，作受力分析，画受力图如图1-2-14（b）所示。

（3）建立图示的直角坐标系 xCy，列平衡方程求 F_{AB}、F_{Cx}、F_{Cy}。

$$\begin{cases} \Sigma M_C(F) = 0 & F_{AB}\sin 30^\circ \times 4 - G_1 \times 2 - G_2 \times 3 = 0 \\ \Sigma F_x = 0 & F_{Cx} - F_{AB}\cos 30^\circ = 0 \\ \Sigma F_y = 0 & F_{AB}\sin 30^\circ + F_{Cy} - G_1 - G_2 = 0 \end{cases}$$

（4）代入数值，求解未知量。

$$F_{AB} = \frac{G_1 \times 2 + G_2 \times 3}{\sin 30^\circ \times 4} = \frac{2 \times 2 + 6 \times 3}{0.5 \times 4} = 11\text{kN}$$

$$F_{Cx} = F_{AB}\cos 30^\circ = 11 \times 0.866 = 9.53\text{kN}$$

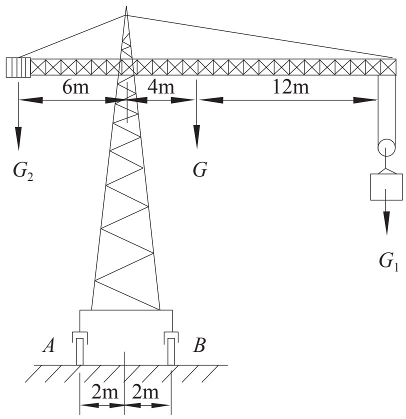
$$F_{Cy}=G_1+G_2-F_{AB}\sin 30^{\circ}=2+6-11\times 0.5=2.5\text{kN}$$

结论：杆AB受拉力11kN，铰链C处的约束反力 $F_{Cx}=9.53\text{kN}$（方向→），$F_{Cy}=2.5\text{kN}$（方向↑）。

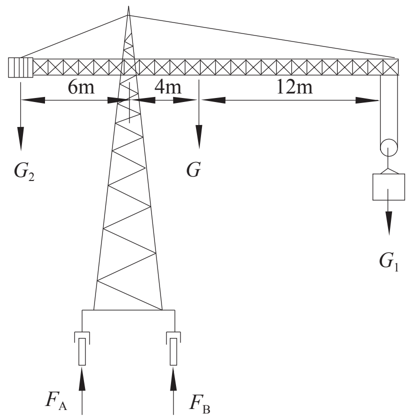
小贴士：平面任意力系分析与解决问题的步骤与方法：

1. 确定研究对象，画出受力分析图；
2. 选取投影坐标轴和矩心，列平衡方程，优先采用力矩式解题；
3. 求解未知量，讨论结果。

【例1-2-5】如图1-2-15（a）所示为起重机简图。已知：$G=700\text{kN}$，最大起重量 $G_1=200\text{kN}$，试求保证起重机满载和空载时不翻倒的平衡块重G_2。



（a）起重机简图



（b）以起重机为对象作受力分析图

图 1-2-15

解：（1） 首先取起重机为对象，作受力分析图如图1-2-15（b）所示。

（2） 分析：满载时（$G_1=200\text{kN}$）若平衡块过轻，则会使机身绕点B向右翻倒，因此须配一定重量的平衡块。在临界状态下，点A悬空，$F_A=0$，平衡块重应为$G_{2\min}$。

空载时（$G_1=0$）与满载情况不同，在平衡块作用下，机身可能绕点A向左翻倒，临界状态下，点B悬空，$F_B=0$，平衡块重应为$G_{2\max}$。

（3） 列平衡方程求$G_{2\min}$、$G_{2\max}$

由 $\Sigma M_B(F)=0$，得$G_{2\min}\times(6+2)-G\times 2-G_1(12-2)=0$

解得 $G_{2\min}=425\text{kN}$

由 $\Sigma M_A(F)=0$，得$G_{2\max}\times(6-2)-G\times(4+2)=0$

解得 $G_{2\max}=1050\text{kN}$

由以上可知，为保证起重机安全，平衡块必须满足下列条件：$425\text{kN}<G_2<1050\text{kN}$。

任务小结

1. 力偶是由等值、反向、不共线的两平行力组成的力系。力偶作用的效应取决于力偶矩的

大小，力偶矩转向与力偶的作用面。力偶矩的值为力偶中任一力与力偶臂的乘积。力偶只能与力偶等效，力偶也只能与力偶平衡。

2. 平面力偶系可以合成一个合力偶，平面力偶系平衡的充分必要条件是合力偶为零。
3. 平面任意力系的简化：依据力的平移定理，将力向力系作用面内任一点（简化中心）平移，但必须附加一力偶。平面任意力系简化的结果是通常得一个平面汇交力系加一个平面力偶系（或只有一个平面力偶系）。
4. 平面任意力系平衡的充分必要条件是：$\Sigma F_x = 0$，$\Sigma F_y = 0$，$\Sigma M_O(F) = 0$
   平面任意力系有三个独立的平衡方程，可求解三个未知量。

测试题

一、判断题

1. 一平面汇交力系处于平衡状态，该汇交力系的合力一定为零。（ ）
2. 用平衡方程解出未知力为负值，则表明该力在坐标轴上的投影一定为负值。（ ）
3. 力矩为零表示力作用线通过矩心或力为零。（ ）
4. 平面上一个力和一个力偶可以简化成一个力。（ ）
5. 一个平面任意力系只能列一组三个独立的平衡方程，解出三个未知数。（ ）

二、选择题

1. 日常生活中转动钥匙是受（ ）的作用。
   A. 力偶　B. 作用力与反作用力　C. 平面汇交力系　D. 二平衡力
2. 如图1-2-16所示的平面力系的简化结果表明力系是（ ）。
   A. 平面汇交力系　B. 平面力偶
   C. 平面平行力系　D. 平面任意力系

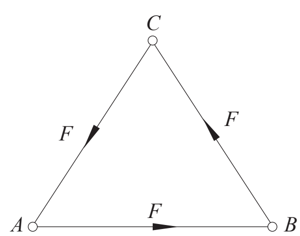


图 1-2-16

3. 如1-2-16图所示，该力系向 A 点简化得到（ ），该力系向 B 点简化得到（ ）。
   A. $F_R' = 0$，$M_R = 0$　B. $F_R' = 0$，$M_R \neq 0$
   C. $F_R' \neq 0$，$M_R = 0$　D. $F_R' \neq 0$，$M_R \neq 0$
4. 如图1-2-17所示，半径为r的鼓轮，作用力偶M与鼓轮左边重 F 的重物使鼓轮处于平衡状态。鼓轮的状态表明（ ）。
   A. 力偶可以与一个力平衡　B. 力偶不能与力偶平衡
   C. 力偶只能与力偶平衡　D. 一定条件下，力偶可以与一个力平衡

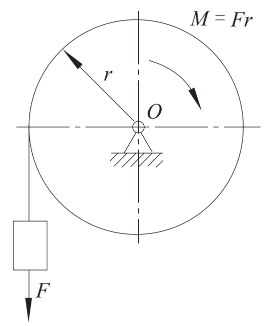


图 1-2-17

5. 如图1-2-17所示，鼓轮的平衡条件是（ ），鼓轮的平衡方程是（ ）。

A. $\Sigma M_{O}(F)=0$　B. $\Sigma M_{O}(F)\neq 0$　C. $M+F_{r}=0$　D. $F_{r}-M=0$

6. 作用在一个刚体上的两个力 F_A 、 F_B，满足 $F_A=-F_B$ 的条件，则该二力可能是（ ）。

A. 作用力和反作用力或一对平衡力　B. 一对平衡力或一个力偶

C. 一对平衡力或一个力和一个力偶　D. 作用力和反作用力或一个力偶

三、计算题

1. 试计算图1-2-18中力 F 对点 O 之力矩。

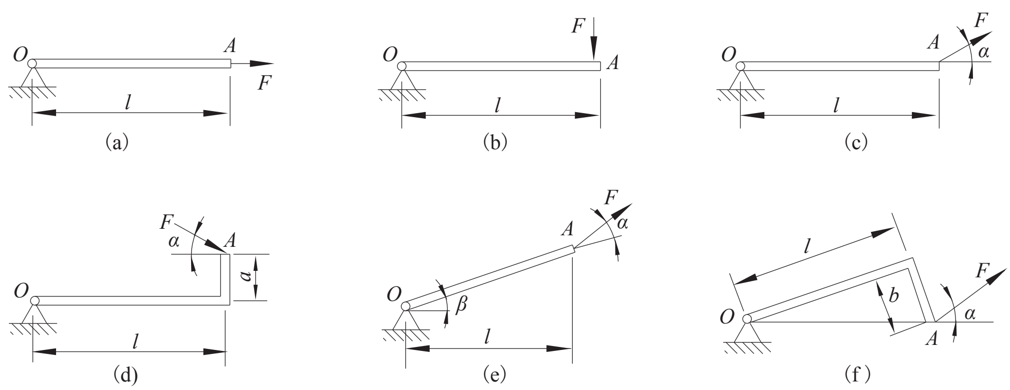


图 1-2-18

2. 如图1-2-19所示的三角支架由杆 AB 、杆 AC 铰接而成，在 A 处作用有重力 G ，试求图示情况杆 AB 、杆 AC 所受的力（不计杆的自重）。

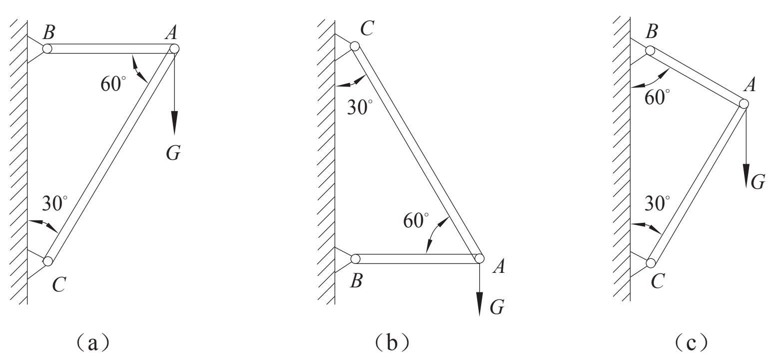
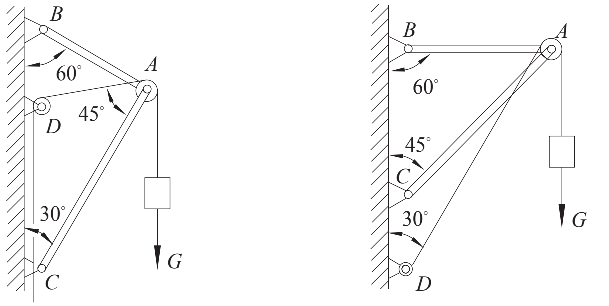


图 1-2-19

3. 如图1-2-20所示简易起重机，用钢丝绳吊起重力 $G=2\text{kN}$ 的重物，A、B、C 三处为铰链连接，求杆 AB 和杆 AC 所受的力（不计杆的自重、摩擦及滑轮尺寸大小）。



（a）　　（b）

图 1-2-20

4. 试求图1-2-21各梁的支座约束反力。已知 $F=6\text{kN}$，$q=2\text{kN/m}$，$M=2\text{kN}\cdot\text{m}$，$a=1\text{m}$。

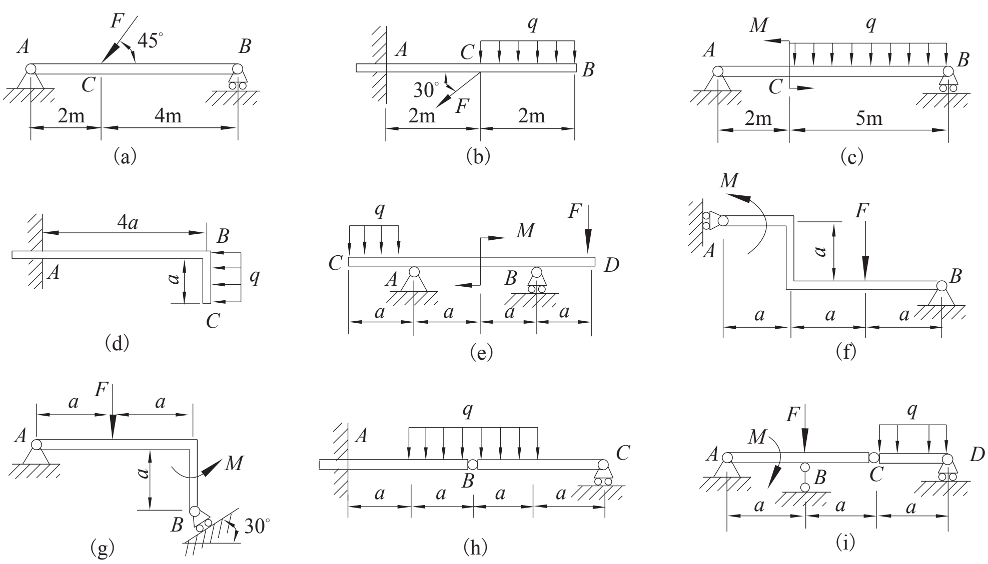


图 1-2-21

5. 如图1-2-22所示为汽车地秤简图，BCE 为整体台面，杠杆 AB 可绕 O 轴转动，B、C、D 均为铰链连接，杆 DC 处于水平位置，砝码的重量 G_1，尺寸 l、a 为已知，试求平衡时砝码的重量 G_1 与被秤汽车的重量 G_2 的关系。

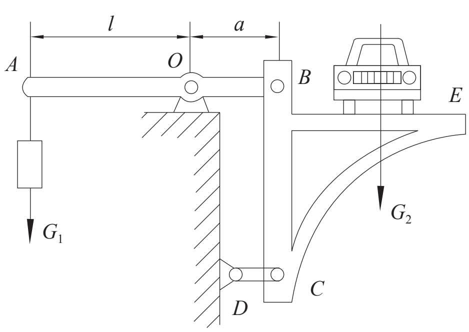


图 1-2-22

6. 如图1-2-23所示的汽车起重机，车体重 $G_1 = 26\text{kN}$，吊臂重 $G_2 = 4.5\text{kN}$，起重机旋转及固定部分重 $G_3 = 31\text{kN}$。试求图示位置汽车不致翻转的最大起重量 G。

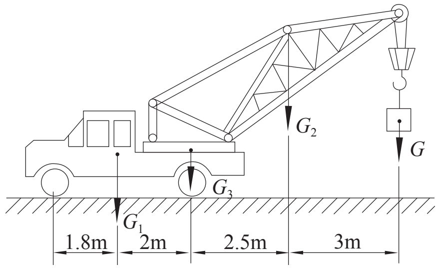


图 1-2-23

任务3 拉压杆强度计算

学习目标

1. 了解材料力学的基本任务。
2. 掌握用截面法求杆件的内力。
3. 掌握轴向拉伸或压缩的应力计算、强度计算和变形计算。
4. 了解一些材料的力学性能与拉伸或压缩的实验。

导入

在前面的静力学课程中，通过力的平衡关系，解决了求解构件约束力的计算问题。但在外力作用下，构件能否正常工作呢（是否有足够的强度来抵抗破坏能力），变形过大是否会影响构件的工作精度呢（是否有足够的刚度来抵抗变形的能力）？

知识准备

一、基本概念

1. 强度、刚度与稳定性的概念

机械零件受力后会发生一定程度的变形。零件变形过大时，会丧失工作精度，引起噪声，降低使用寿命，甚至损坏。为了保证机器安全可靠地工作，要求每一构件在外力作用下，应具有足够的强度，足够的刚度和足够的稳定性。强度指抵抗破坏的能力，刚度指抵抗变形的能力，稳定性指保持平衡的能力。

2. 变形

工程结构或机械的每一构件均承受一定的外力。在外力的作用下，其尺寸及形状总会有不同程度的改变，这种改变一般称为变形。变形分为两类：弹性变形和塑性变形。

构件在外力作用下产生变形，随外力去除而能消失的变形称为弹性变形，而外力去除后构件无法恢复原样的变形称为塑性变形。

实验证明，当外力不超过某一限度时，出现弹性变形。若外力超过某一限度，即使外力去除后，构件的形状和尺寸也不能完全恢复原状，即产生塑性变形。

构件在外力的作用下，不仅使构件产生变形，而且随着外力的增大，达到一定值时，构件将会被破坏。

3. 材料力学的任务

材料力学的任务是研究构件在外力作用下产生变形或破坏的规律，在保证构件强度、刚度和稳定性的前提下，为构件的合理设计提供必要的实验研究、理论分析和计算方法。

4. 构件的分类

构件的几何形状大致归为四类，即杆、板、壳、块，材料力学的主要研究对象是杆件。

5. 杆件变形的基本形式

杆件在不同形式的外力作用下会产生不同形式的变形。外力形式有拉（压）载荷、剪切载荷、扭转载荷、弯曲载荷或上述多种载荷的组合。由拉（压）载荷作用下产生拉伸（压缩）变形，如图1-3-1（a）、（b）所示。由剪切载荷作用下产生剪切变形如图1-3-1（c）所示，由扭转载荷作用下产生扭转变形如图1-3-1（d）所示，由弯曲载荷作用下产生弯曲变形或多种载荷作用下产生的组合变形如图1-3-1（e）所示。

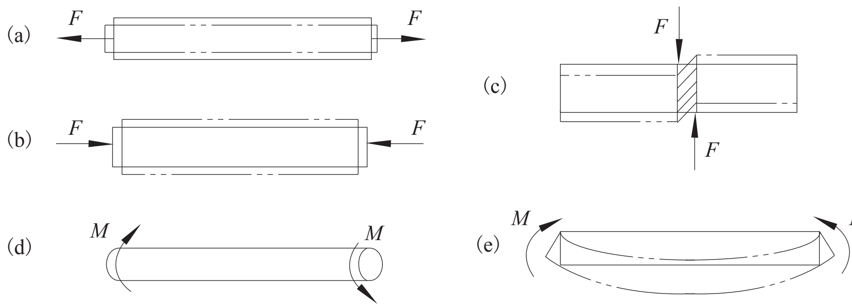


图 1-3-1 杆件的基本变形形式

二、轴力和轴力图

对于所研究的构件，其他构件或物体作用于其上的力均为外力。构件在外力作用下产生变形，其内部各质点之间的相互作用力发生变化，因外力作用而引起的构件内部各质点之间的相互作用力的变化量，称为附加内力，简称为内力。在一定限度内，内力随外力的增大而增加，若内力超过了限度，构件将被破坏。在材料力学中一般应用截面法来分析内力。

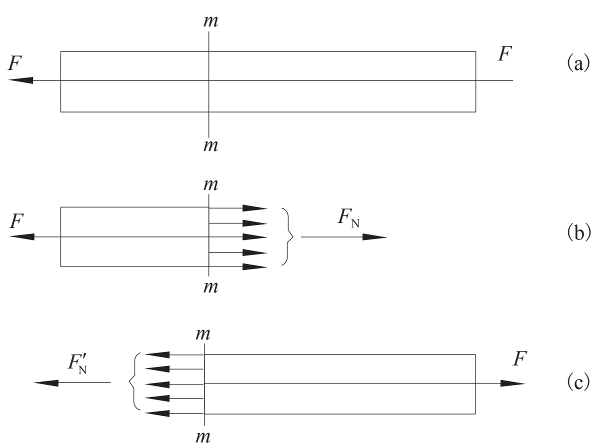


图 1-3-2 截面法求拉杆的内力

如图1-3-2（a）所示受一对平衡力 F 作用的拉杆，为了分析和计算其内力（拉压杆的内力又称为轴力），确定任一截面 $m-m$ 上的轴力，假设沿该截面将杆一截为两段，任意取一段分析其轴力（上图为弃右段分析左段，左段仍是平衡的），所以在截面 $m-m$ 上有一个连续分布的轴力 F_N 作用，如图1-3-2（b）所示，该轴力 F_N 是由左段杆件外力 F 作用而产生的，由静力平衡条件可得 $F_N=F$ 。同样取右段来研究可得到相同结果，如图1-3-2（c）所示。

由上述可得出结论，当拉压杆受轴向拉伸（或压缩）时，相应产生的轴力为受拉（或受压），并且横截面上的轴力 F_N 是一个沿杆件轴线的力，规定受拉的轴力为“+”，受压的轴力为“−”。

掌握应用截面法求轴力的步骤：

（1）在欲求内力的截面处，假想将杆件截成两段，任取一段进行分析。

（2）方法一：留下一段的截面处加上轴力 F_N ，运用静力平衡条件确定轴力 F_N 的大小和方向，再按材料力学拉压杆的规定确定轴力的正负。

（3）方法二：直接按材料力学拉压杆的规定，外力对截面产生受拉的轴力为“+”，受压的轴力为“−”，直接进行计算求轴力 F_N 。

【例1-3-1】如图1-3-3（a）所示拉伸或压缩杆，试用截面法求杆指定截面的轴力，并画出轴力图。

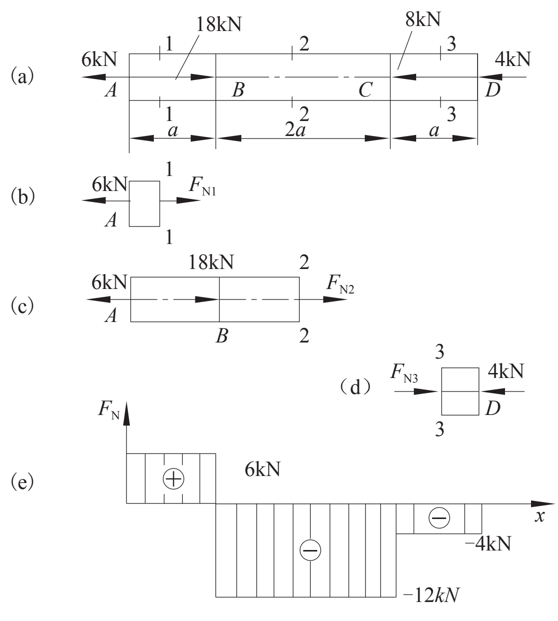


图 1-3-3

解：分析：此杆在 A 、 B 、 C 、 D 处作用有轴向外力，并处于平衡状态。

（1）在 AB 段作1-1截面，并取左段进行分析，截面处加上如图1-3-3（b）所示的轴力 F_{N1}；

方法1：按静力学由平衡方程 $\Sigma F_x=0$ ，得 $F_{N1}-6=0$ ，所以 $F_{N1}=6\text{kN}$ （方向 →）。

按材料力学，说明 AB 段受到拉力，轴力为正，所以AB段所受的轴力 $F_{N1}=6\text{kN}$ 。

方法2：可直接按材料力学拉压杆的规定，杆 AB 段受拉力，所以 $F_{N1}=6\text{kN}$ 。

（2）在 BC 段作2-2截面，切开后取左段分析。

方法1：按如图1-3-3（c）所示在截面处加上轴力 F_{N2} ；按静力学由平衡方程 $\Sigma F_x=0$ ，得 $F_{N2}+18-6=0$ ， $F_{N2}=-12\text{kN}$ （方向←），按静力学说明轴力 F_{N2} 与所设方向相反。再按材料力学的规定，说明杆 BC 段受压力，所以 $F_{N2}=-12\text{kN}$ 。

方法2：直接按材料力学拉压杆的规定，杆 BC 段所受轴力 F_{N2} 是由外力即拉力 6kN 与压力−18kN共同作用的结果，所以 $F_{N2}=6\text{kN}-18\text{kN}=-12\text{kN}$ （受压）。

（3）在 CD 段作3-3截面，切开后取右段分析，截面处加上如图1-3-3（d）所示的轴力 F_{N3}；

直接按材料力学拉压杆的规定，杆 CD 段受到压力 4kN，所以 $F_{N3}=-4\text{kN}$ 。

（4）画轴力图，如图1-3-3（e）所示，从轴力图可看出最大轴力在杆 BC 段内。

三、应力

在确定了拉压杆的内力后，还不能判断杆件的强度是否足够。如有两根材料相同但直径不同的拉杆，在同样拉力的作用下，它们的内力相同，但当拉力逐渐增大时，应该是细杆先被拉断。这说明杆件的强度不仅与内力大小有关，还与截面的面积有关。横截面积小（细的杆件）的杆件，单位面积上的内力就大，反之横截面积大（粗的杆件）的杆件，单位面积上的内力就小，为此引入内力的分布集度——应力的概念。

材料在单位横截面上的内力（轴力）称为应力，用“σ”表示正应力。

$$\sigma=\frac{F_N}{A} \tag{1-3-1}$$

式中 F_N 表示拉压杆横截面上的轴力，单位为N； A 表示拉压杆的横截面积（若 A 的单位取mm^2，则应力σ的单位为MPa。若 A 的单位取m^2，则应力σ的单位为Pa，1MPa＝10^{6}Pa）。

应力也有正负，拉应力为“+”，压应力为“−”。

【例1-3-2】如图1-3-4（a）所示，在直杆中段正中铣一槽，直杆受轴向载荷 $F=15\text{kN}$ 的作用，已知 $h=25\text{mm}$ ， $h_0=10\text{mm}$ ， $b=15\text{mm}$ ，试求直杆内的最大正应力。

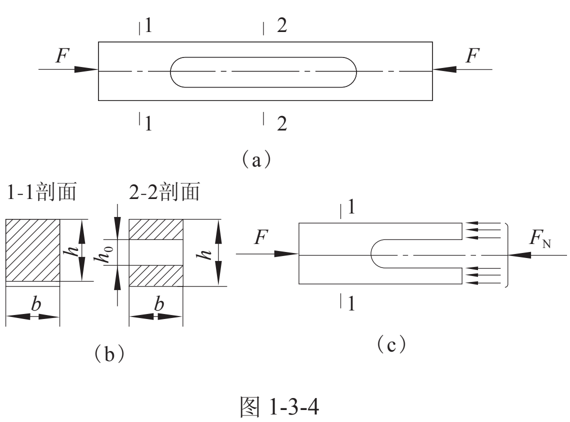


图 1-3-4

解：（1）用截面法求直杆的轴力

由截面法可知，截面1-1、截面2-2处的轴力相同，均为受压；$F_{N1}=F_{N2}=-F=-15\text{kN}$

（2）求直杆内的最大正应力

分析：整个杆件上轴力相同，最大正应力发生在面积较小的横截面上，即图中铣槽部分的横截面上如图1-3-4（b）所示2-2剖面，

所以：$$\sigma_{\max}=\frac{F_{N2}}{A_2}=-\frac{F_{N2}}{(h-h_0)\times b}=-\frac{15\times10^3}{(25-10)\times15}=-66.7\text{MPa}$$

负号表示最大应力为压应力。

四、轴向拉压杆的变形和胡克定律

1. 纵向线应变和横向线应变

杆件受轴向拉力 F 时，在轴线方向尺寸会伸长，同时横向尺寸会缩小，如图1-3-5所示。反之受到压缩时，轴线方向尺寸会缩短，横向尺寸会增大。

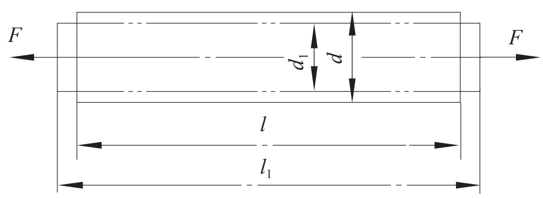


图 1-3-5 杆件受轴力作用产生纵向与横向变形

杆的纵向绝对变形量：$\Delta l=l_1-l$

杆的横向绝对变形量：$\Delta d=d_1-d$

为了消除长度的影响，用单位长度内杆的变形量即线应变ε来衡量杆的变形程度，即为绝对伸长量 Δl 除以杆的原长 l，所以线应变 $\varepsilon=\dfrac{\Delta l}{l}$。$\varepsilon$ 又称为纵向线应变（又称正应变），是一个无量纲的量。

2. 胡克定律

由实验得出，在比例极限内（在弹性变形范围内）正应力σ与正应变ε成正比，即$\sigma\propto\varepsilon$，引进比例系数E（查阅机械设计手册，可得各种材料的E值），即

$$\sigma=E\varepsilon \tag{1-3-2}$$

上式称为胡克定律，式中E为材料的弹性模量，量纲与σ相同。

实验还指出：在弹性变形范围内，杆的绝对变形量Δl与轴力F、杆长l成正比，与杆的横截面积A、材料的弹性模量E成反比。

所以胡克定律另一表达方式为：

$$\Delta l=\frac{F_N l}{EA} \tag{1-3-3}$$

【例1-3-3】圆截面阶梯状杆（轴）如图1-3-6所示，受到$F=150\text{kN}$的轴向拉力作用。已知中间部分的直径$d_1=30\text{mm}$，两端部分的直径均为$d_2=50\text{mm}$，整个杆长$l=250\text{mm}$，

中间部分杆长 $l_1 = 150\text{mm}$，$E = 200\text{GPa}$（$1\text{GPa}=10^3\text{MPa}$）。试求：（1）各部分横截面上的正应力 σ；（2）整个杆的总伸长量 Δl。

解：（1）整个圆截面阶梯轴所受的轴力为 $F_\text{N} = F = 150\text{kN}$。

（2）求杆中间部分横截面上的正应力σ_1：

$$\sigma_1 = \frac{F_\text{N}}{A_1} = \frac{4 \times 150 \times 10^3}{3.14 \times 30^2} = 212.3\text{MPa}$$

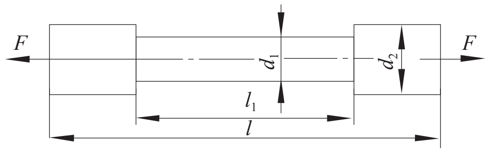


图 1-3-6 圆截面阶梯状杆（轴）

（3）求杆两端横截面上的正应力σ_2：

$$\sigma_2 = \frac{F_\text{N}}{A_2} = \frac{4 \times 150 \times 10^3}{3.14 \times 50^2} = 76.4\text{MPa}$$

（4）求整个杆的总伸长量 Δl：

杆中间部分的伸长量：$\Delta l_1 = \dfrac{F_\text{N} l_1}{EA_1} = \dfrac{4 \times 150 \times 10^3 \times 150}{200 \times 10^3 \times 3.14 \times 30^2} = 0.159\text{mm}$

杆两端的伸长量：$\Delta l_2 = 2\dfrac{F_\text{N} l_2}{EA_2} = \dfrac{2 \times 4 \times 150 \times 10^3 \times 50}{200 \times 10^3 \times 3.14 \times 50^2} = 0.038\text{mm}$

整个杆的总伸长量：$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0.159 + 0.038 = 0.197\text{mm}$

五、拉压杆的强度计算

1. 许用应力和安全系数

由汽车材料中的拉伸试验知道，当应力达到屈服极限σ_s时，会引起明显的塑性变形，当应力达到强度极限σ_b时，会引起断裂。显然构件在工作时发生明显的塑性变形或断裂都是不允许的，所以σ_s和σ_b都称为材料的极限应力。对塑性材料，因$\sigma_\text{s} < \sigma_\text{b}$，通常以屈服极限$\sigma_\text{s}$为极限应力；对脆性材料，因没有屈服阶段，故以强度极限σ_b作为极限应力。

为了保证构件能安全可靠地工作，应该使其工作应力（即构件工作时由载荷引起的应力）低于材料的极限应力。又因为构件工作时的载荷难以准确估计，材料也不像假设的那样绝对均匀，并且构件在工作时可能遇到超载或其他未能估计到的不利工作条件，所以要求构件有一定的强度储备，留有充分余地，以保证其正常工作。一般是将极限应力除以大于1的系数 n，作为构件工作时允许的最大应力，这个允许的最大应力称为许用应力，用$[\sigma]$表示，而 n 称为安全系数。

对塑性材料：$[\sigma]=\sigma_\text{s}/n$

对脆性材料：$[\sigma]=\sigma_\text{b}/n$

注意脆性材料在拉伸与压缩时的许用应力是不相同的。

在上述的许用应力$[\sigma]$中，所有材料的屈服极限σ_s或强度极限σ_b的数据都是由国家权威机构通过实验获得，可以通过查阅机械设计手册获得。

对于安全系数n的值，取得过小，则构件强度储备不足，构件工作时安全可靠度降低，若取得过大，构件工作时是安全可靠了，但会造成机器或构件的尺寸过大，结构粗笨，浪费材料。所以安全系数n取值要考虑较多因素，如构件工作条件、载荷和应力计算的准确程度、材料的均匀性、制造工艺等因素。

2. 拉（压）杆的强度条件

为保证构件能安全可靠地工作，拉（压）杆的工作应力不得超过材料许用应力，即

$$\sigma=\frac{F_N}{A}\leqslant[\sigma] \tag{1-3-4}$$

上式称为拉（压）杆的强度条件。公式左面是工作应力，单位面积的内力，是外载荷作用产生的应力；公式右面是许用应力，是材料拉（压）实验的结果，反映材料的承载能力。

上式说明将工作应力与材料能承载的能力作一比较，小于或等于$[\sigma]$说明杆件安全（能满足强度要求），大于$[\sigma]$则说明杆件不安全（不能满足强度要求）。

式中F_N表示拉压杆横截面上的轴力，单位为N；A表示拉压杆的横截面积，单位为mm^2；σ（$[\sigma]$）表示工作应力（许用应力），单位为MPa。

应用拉（压）杆的强度条件，可以进行下面三方面的强度计算：

（1）强度校核。已知杆件的材料、截面尺寸、所承受的载荷，应用上式可校核杆件是否满足强度要求。若$\sigma\leqslant[\sigma]$则满足强度要求，若$\sigma\geqslant[\sigma]$则强度不够。

（2）设计截面尺寸。已知杆件所承受的载荷、材料的许用应力，将上式改写为$A\geqslant F_N/[\sigma]$，由此确定杆件的截面尺寸。

（3）确定许可载荷。已知杆件的截面尺寸、材料的许用应力，将上式改写为$F_N\leqslant A[\sigma]$，计算出杆件所允许承受的轴力（即确定构件的许可载荷）。

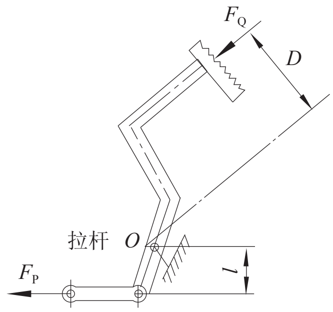
【例1-3-4】已知一吊灯重300N，用一绳挂在墙顶上，已知绳的许用应力$[\sigma]$=10MPa，绳的直径$d=5\text{mm}$，校核绳的强度。

解：
$$\sigma=\frac{F_N}{A}=\frac{4F_N}{\pi d^2}=\frac{4\times300}{\pi\times5^2}=15.2\text{MPa}>[\sigma]=10\text{MPa}$$

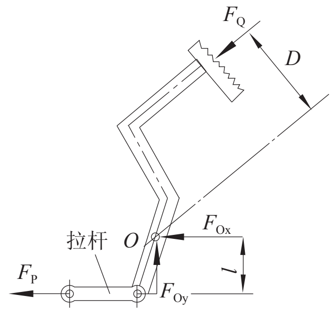
结论：不安全（绳的强度不够）。

分析讨论：绳的强度不够怎么办？可采用什么措施使$\sigma\leqslant[\sigma]$？

【图1-3-5】图1-3-7（a）所示为汽车离合器踏板的机构简图。已知踏板受到压力$F_Q=400\text{N}$，拉杆的直径$d=9\text{mm}$，许用应力$[\sigma]=50\text{MPa}$，杠杆臂长$D=330\text{mm}$，$l=56\text{mm}$，试校核拉杆的强度。



（a）离合器踏板机构简图



（b）受力分析图

图 1-3-7

解：（1）作受力分析，如图1-3-7（b）所示。

（2）列平衡方程求拉杆所受的力 F_P ：$\Sigma M_O(F)=0$

所以 $F_Q D - F_P l = 0$， $F_P = \dfrac{F_Q D}{l} = \dfrac{400\times330}{56} = 2357\text{N}$

（3）校核拉杆的强度。

拉杆受到的内力为：$F_N = F_P = 2357\text{N}$

$$\sigma = \frac{F_N}{A} = \frac{F_N}{1/4\pi d^2} = \frac{2357\times4}{\pi\times9^2} = 37.1\text{MPa} \leqslant [\sigma] = 50\text{MPa}$$

结论：安全（拉杆的强度满足要求）。

分析讨论：

提问1：在上题中，同样的条件，拉杆能承受的最大载荷 F_{max} 是多少？

提问2：在上题中，在这样的载荷 F_Q 作用下，拉杆最小的直径 d_{min} 是多少？

任务小结

1. 材料力学的任务是保证构件既安全又经济的前提下，选择合适的材料、确定合理的截面形状和尺寸等；在外力作用下工作的构件，必须满足强度、刚度和稳定性的要求，即满足构件的承载能力要求。
2. 通过【例1-3-5】的解题过程，整理自己的思路，理解拉（压）杆强度计算的过程与步骤。
3. 拉（压）杆用截面法求内力（轴力），在后述的剪切、扭转、弯曲强度计算都要先应用截面法求内力，所以掌握截面法求杆件的内力是强度计算的基础。
4. 应力σ的概念，单位面积的内力，应变ε的概念，单位长度的变形量。应力与应变之间的关系，$\sigma = E\varepsilon$。
5. 拉（压）杆的强度条件：$\sigma_{max} \leqslant [\sigma]$

   公式左面是工作应力，通过计算得到外载荷作用产生的应力；公式右面是许用应力，是材料拉（压）实验的结果，反映材料的承载能力。通过计算得到外载荷作用产生的工作

应力不能超过材料的承载能力。还需了解塑性材料、脆性材料的拉（压）试验，在试验过程中出现的各种现象，材料的力学（机械）性能，安全系数的选择等。

6. 熟练运用强度条件的三类计算：强度校核、确定许可载荷、设计截面尺寸。

测试题

一、选择题

1. 如图1-3-8所示构件，（ ）发生轴向拉伸变形，（ ）发生轴向压缩变形。

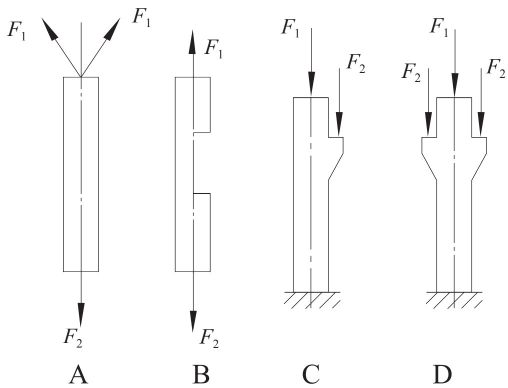


图 1-3-8

2. 图1-3-9所示杆件，其截面1-1的轴力是（ ），截面2-2的轴力是（ ）。

A. 5kN　　B. 8kN　　C. 3kN　　D. −3kN

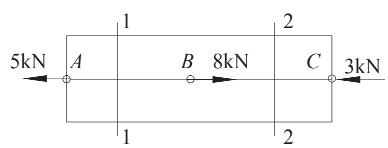


图 1-3-9

3. 当拉（压）杆是等截面时，最大应力必发生在（ ）的这段杆件内；阶梯形截面杆且轴力相同时，最大应力发生在（ ）的这段杆件内；大截面上作用大轴力、小截面作用小轴力时，需（ ）确定最大应力。

A. 截面最小　　B. 最大轴力　　C. 分别计算　　D. 不能确定

4. 截面相同、轴力相同、材料不同的两拉杆，它们的应力（ ），强度（ ）。

A. 不相同　　B. 不一定相同　　C. 相同　　D. 无法判断

5. 构件的许用应力$[\sigma]$是保证构件安全工作的（ ）。

A. 最高工作力　　B. 最低破坏力　　C. 最低工作力　　D. 平均工作力

6. 根据强度条件，构件危险截面上的最大工作应力应不大于材料的（ ）。

A. 极限应力　　B. 屈服应力　　C. 破坏应力　　D. 许用应力

二、判断题

1. 杆件两端受等值、反向、共线的一对外力作用，杆件一定发生的是轴向拉（压）变形。 （ ）
2. 截面法是材料力学求内力的普遍方法。 （ ）
3. 材料相同的两拉杆，若两杆的绝对变形相同，则相对变形一定相同。 （ ）
4. 工程实际中，如果构件发生过大的塑性变形或断裂，则不能正常安全地工作，因此塑性材料是以屈服点作为破坏时的极限应力，脆性材料是以强度极限作为破坏时的极限应力。 （ ）
5. 应力达到材料的屈服极限，构件就产生了屈服变形。
6. 材料力学中对构件进行受力分析时，能将外力沿其作用线任意移动而不影响对构件的作用。 （ ）

三、计算题

1. 拉伸或压缩杆如图1-3-10所示，试用截面法求各杆指定截面的轴力，并作轴力图。

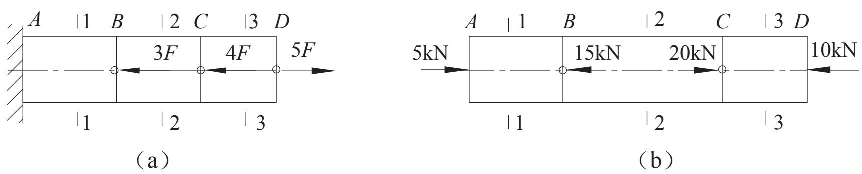


图 1-3-10

2. 求图1-3-11所示阶梯状直杆横截面1–1、2–2和3–3上的轴力，并作轴力图。如横截面面积 $A_1 = 200\text{mm}^2$，$A_2 = 300\text{mm}^2$，$A_3 = 400\text{mm}^2$，求各横截面上的应力。

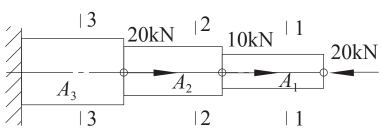


图 1-3-11

3. 柴油机上的气缸盖螺栓尺寸如图1-3-12所示。已知螺栓承受预紧力 $F = 390\text{kN}$，材料的弹性模量 $E = 210\text{GPa}$，试求螺栓的伸长量 Δl（两端螺纹部分不考虑）。

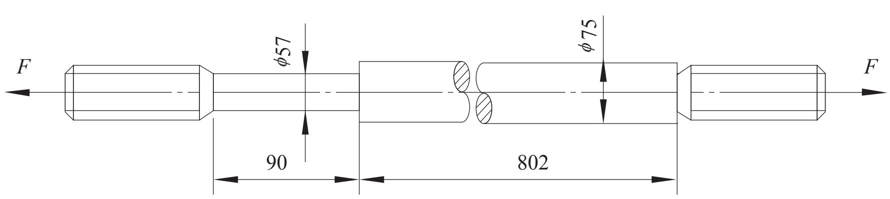


图 1-3-12

4. 用绳索吊起重物如图1-3-13所示。已知 $F = 20\text{kN}$，绳索横截面积 $A = 12.6\text{cm}^2$，许用应力 $[\sigma]$ =10MPa。试校核 $\alpha = 45°$ 时绳索的强度。若绳索的强度不够可采用什么措施来满足 $\sigma \leqslant [\sigma]$？

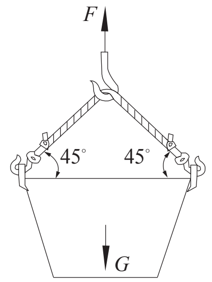


图 1-3-13

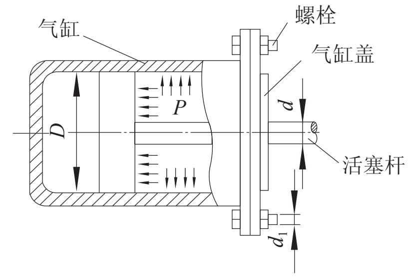


图 1-3-14

5. 一气缸如图1-3-14所示，其内径 $D=560\text{mm}$，气缸内的气体压强 $P=250\,\text{N/cm}^2$，活塞杆直径 $d=100\text{mm}$，所用材料的屈服点σ_s=300MPa。

（1）试求活塞杆的正应力和工作安全系数；

（2）若连接气缸与气缸盖的螺栓直径$d_1=30\text{mm}$，螺栓所用材料的许用应力$[\sigma]=60\text{MPa}$，试求所需要的螺栓数。

6. 三角架的结构及尺寸如图1-3-15所示。已知杆AB为钢杆，其横截面面积$A_1=600\text{mm}^2$，许用应力$[\sigma]=140\text{MPa}$；杆BC为木杆，横截面积$A_2=3\times10^4\,\text{mm}^2$，许用压应力$[\sigma_2]=3.5\text{MPa}$。试求许用载荷$[F]$。

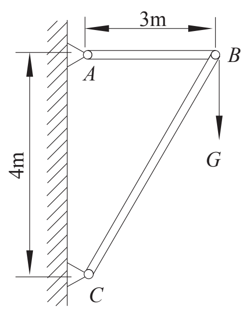


图 1-3-15

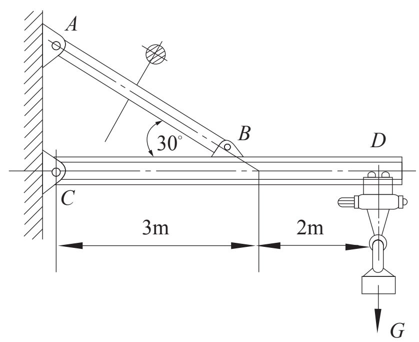


图 1-3-16

7．某悬臂吊车结构与尺寸如图1-3-16所示，最大起重量 $G=20\text{kN}$，杆AB为Q235圆钢，$[\sigma]=120\text{MPa}$，试确定杆AB的直径 d。

任务4 剪切与挤压的强度计算

学习目标

1. 掌握剪切与挤压的概念。
2. 掌握切应力与挤压应力的计算公式。
3. 掌握剪切和挤压的强度条件，在相关实用计算中灵活运用剪切与挤压。

导入

汽车构件之间的连接很多采用了如销钉、键、螺栓、铆钉等连接，如图1-4-1（a）所示汽车挂钩采用螺栓连接，这些构件受力特点主要承受剪切与挤压（图b），是材料力学的基本变形之一。受剪切与挤压的构件，其受力特点、变形、强度计算等问题是如何思考与解决的?

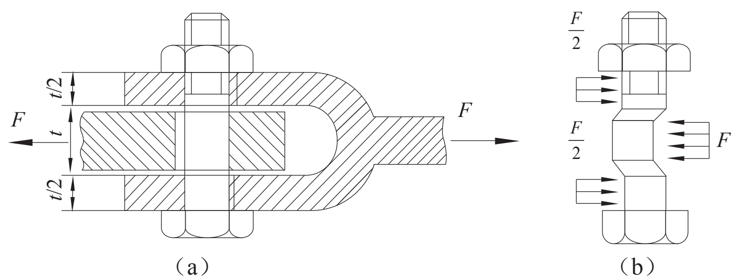
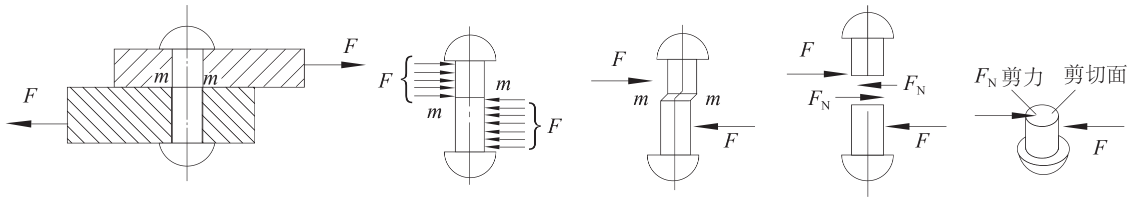


图 1-4-1 螺栓连接与受力、变形特点

知识准备

一、剪切的概念

如图1-4-2（a）所示的铆钉连接，被连接的两块板受拉力 F 作用，铆钉的受力如图1-4-2（b）所示，当拉力 F 增大时，铆钉沿 $m-m$ 截面会产生相对错动，如图1-4-2（c）所示，甚至可能被切断。这种截面发生相对错动的变形称为剪切变形。剪切变形的受力特点是：外力大小相等、方向相反、作用线平行且相距很近。其变形特点是：铆钉沿两个力作用线之间的截面发生相对错动。发生相对错动的面称为剪切面，剪切面上与截面相切的内力称为剪力，用F_N表示，如图1-4-2（d）所示。



（a）铆钉连接　　（b）受力分析　　（c）发生错位　　（d）剪力与剪切面

图 1-4-2 剪切的概念

对剪切变形求内力F_N采用截面法，假设销钉沿截面（剪切面）$m-m$切开，任意取一段作受力分析，如图1-4-2（d）所示取下面一段为对象作受力分析，按静力平衡方程，$F_N=F$。

二、剪切的实用计算

由于连接件发生剪切而使剪切面上产生了切应力τ，切应力在剪切面上的分布情况一般比较复杂，工程中为便于计算，通常认为切应力在剪切面上是近似均匀分布的。由此得出切应力τ的计算公式为：

$$\tau=\frac{F_N}{A} \tag{1-4-1}$$

式中F_N表示剪切面上的剪力，单位为N；A表示剪切面面积，单位为mm^2；τ为切应力，单位为MPa。

为保证连接件工作时安全可靠，要求切应力τ不超过材料的许用切应力$[\tau]$。由此得剪切的强度条件为：

$$\tau=\frac{F_N}{A}\leqslant[\tau] \tag{1-4-2}$$

式中$[\tau]$表示材料的许用切应力。常用材料的许用切应力可查阅有关机械设计手册。

与拉（压）杆的强度条件类似，剪切的实用计算也可进行以下三方面的强度计算：

（1）强度校核：$\tau=\frac{F_N}{A}\leqslant[\tau]$

（2）确定许可载荷：$F_N\leqslant A[\tau]$

（3）设计截面尺寸：$A\geqslant\frac{F_N}{[\tau]}$

三、挤压的概念与挤压实用计算

如图1-4-3所示，铆钉连接件在发生剪切变形的同时，在传递力的接触面上也会受到较大的压力作用，接触面处会产生局部显著的塑性变形，如铆钉孔被压成长圆孔，这种局部受压的现象称为挤压。

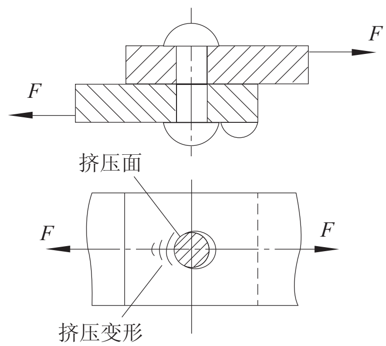


图 1-4-3 挤压实例

由挤压力引起的应力称为挤压应力，用σ_{jy}表示。在挤压面上挤压应力分布相当复杂，工程中通常认为挤压应力在计算挤压面上近似均匀分布。由此得到挤压应力σ_{jy}的计算公式为：

$$\sigma_{jy}=\frac{F_{jy}}{A_{jy}} \tag{1-4-3}$$

式中F_{jy}表示挤压面上的挤压力，单位为N；A_{jy}表示计算挤压面积，单位为mm^2；挤压应力σ_{jy}的单位为MPa。

注意：当挤压面为平面时，计算挤压面积即为实际挤压面的面积；当挤压面为圆柱面时，计算挤压面积等于圆柱面的正投影面积，如图1-4-4所示。

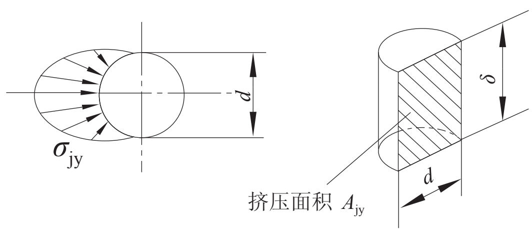


图 1-4-4 挤压面积

为保证连接件具有足够的挤压强度而正常工作，其强度条件为：

$$\sigma_{jy}=\frac{F_{jy}}{A_{jy}}\leqslant\left[\sigma_{jy}\right] \tag{1-4-4}$$

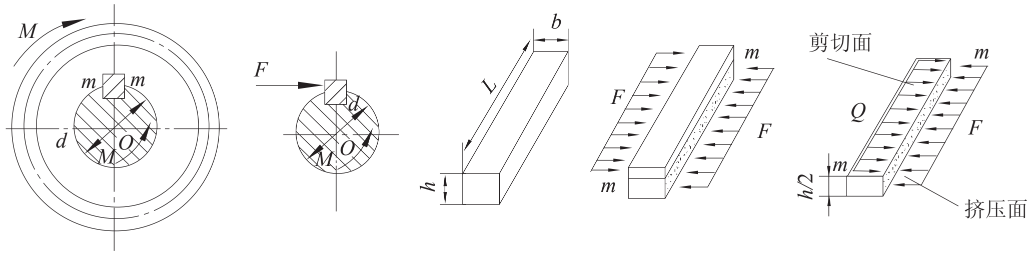
与剪切的实用计算的强度条件相同，挤压的实用计算也有以下三方面应用：

（1）强度校核：$\sigma_{jy}=\dfrac{F_{jy}}{A_{jy}}\leqslant\left[\sigma_{jy}\right]$

（2）确定许可载荷：$F_{jy}\leqslant A_{jy}\left[\sigma_{jy}\right]$

（3）设计截面尺寸：$A_{jy}\geqslant\dfrac{F_{jy}}{\left[\sigma_{jy}\right]}$

【例1-4-1】如图1-4-5所示，齿轮与轴用平键连接，已知轴的直径$d=50\text{mm}$，键的尺寸$L\times b\times h=60\text{mm}\times16\text{mm}\times10\text{mm}$，传递的力矩$M=600\ \text{N}\cdot\text{m}$，键的许用剪应力$[\tau]=60\text{MPa}$，许用挤压应力$\left[\sigma_{jy}\right]=100\text{MPa}$，校核键连接的强度。



（a）键连接　（b）受力分析　（c）键的尺寸　（d）剪切面与挤压面

图 1-4-5

解：（1）分析思考：齿轮与轴之间用键连接，从而传递运动与动力，键承受载荷后产生剪切与挤压变形，故需对键进行剪切与挤压的强度计算。

（2）剪切与挤压的强度计算

计算键所受到的力F：$M=F\times\dfrac{d}{2}$，所以$F=\dfrac{2M}{d}=\dfrac{2\times600}{50\times10^{-3}}=24000\text{N}=24\text{kN}$

键所受到的剪力 $F_{\text{N}}=24\text{kN}$；键所受到的挤压力 $F_{\text{jy}}=24\text{kN}$

校核键的剪切强度：$\tau=\dfrac{F_{\text{N}}}{A}\leqslant[\tau]$

式中剪切面积 $A=b\times L=16\times60=960\text{mm}^2$

所以$\tau=\dfrac{F_{\text{N}}}{A}=\dfrac{24\times10^3}{960}=25\text{MPa}\leqslant[\tau]=60\text{MPa}$，键的剪切强度足够（安全）。

校核键的挤压强度：$\sigma_{\text{jy}}=\dfrac{F_{\text{jy}}}{A_{\text{jy}}}\leqslant[\sigma_{\text{jy}}]$

式中挤压面积 $A_{\text{jy}}=\dfrac{h}{2}\times L=5\times60=300\text{mm}^2$

所以$\sigma_{\text{jy}}=\dfrac{F_{\text{jy}}}{A_{\text{jy}}}=\dfrac{24\times10^3}{300}=80\text{MPa}<[\sigma_{\text{jy}}]=100\text{MPa}$，键的挤压强度足够（安全）。

结论：键的强度足够。

【例1-4-2】 如图1-4-6所示的钢板用铆钉联接，钢板厚度$t=10\text{mm}$，宽度$b=100\text{mm}$，铆钉直径$d=17\text{mm}$，钢板与铆钉材料相同，其许用应力$[\sigma]=160\text{MPa}$，$[\tau]=120\text{MPa}$，$[\sigma_{\text{jy}}]=320\text{MPa}$。试确定结构的许可载荷$[F]$值。

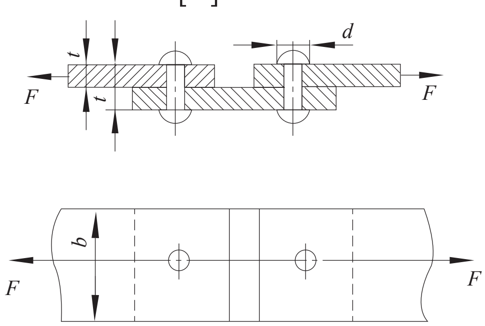


图 1-4-6

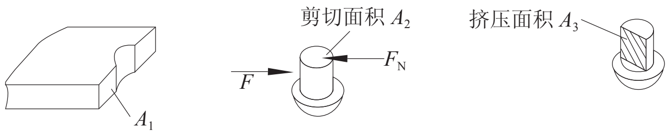
解：（1）分析思考：判断铆钉连接破坏可能有以下三种情况：

①钢板强度不够被拉断，断裂破坏发生在铆钉钻孔处的横截面，如图1-4-7（a）；

②铆钉强度不够产生剪切破坏，沿剪切面，如图1-4-7（b）；

③铆钉或钢板的圆孔处产生挤压变形，如图1-4-7（c）；

所以得按上述三种情况计算结构的许可载荷$[F]$值。



（a） A_1　（b）剪切面积 A_2　（c）挤压面积 A_3

图 1-4-7

（2）按强度条件$\sigma=\dfrac{F_{N1}}{A_1}\leqslant[\sigma]$

式中面积 A_1 为：$A_1=(b-d)\bullet t=(100-17)\times10=830\text{mm}^2$

所以许可载荷：$F_{N1}\leqslant A_1[\sigma]=830\times160=132800\text{N}=133\text{kN}$

（3）按剪切强度条件$\tau=\dfrac{F_{N2}}{A_2}\leqslant[\tau]$

式中面积A_2为：$A_2=1/4\bullet\pi d^2=1/4\times\pi\times17^2=227\text{mm}^2$

所以许可载荷：$F_{N2}\leqslant A_2[\tau]=227\times120=27200\text{N}=27.2\text{kN}$

（4）按挤压强度条件$\sigma_{jy}=\dfrac{F_{N3}}{A_3}\leqslant[\sigma_{jy}]$

式中挤压面积A_3为：$A_3=d\times t=17\times10=170\text{mm}^2$

所以许可载荷：$F_{N3}\leqslant A_3[\sigma_{jy}]=170\times320=54400\text{N}=54.4\text{kN}$

结论：为保证结构安全工作，对以上三个计算结果作分析比较，结构的许可载荷$[F]$值应取以上三个计算值中最小的数值，所以许可载荷$[F]\leqslant27.2\text{kN}$。

任务小结

1. 剪切变形是材料力学中五种基本变形之一，其特点为构件受大小相等、方向相反、作用线平行且相距很近的两外力作用，构件沿两力之间的截面发生相对移动。通常工程中的连接件在承受剪切的同时，还伴随着挤压的作用，挤压是局部产生不均匀的压缩变形。
2. 剪切与挤压的强度条件分别为

$$\tau=\frac{F_N}{A}\leqslant[\tau]\qquad\sigma_{jy}=\frac{F_{jy}}{A_{jy}}\leqslant[\sigma_{jy}]$$

确定连接件的剪切面和挤压面是进行强度计算的关键。剪切面与外力平行且位于这对平行外力之间。而挤压面为平面时，其计算面积等于实际面积；当挤压面为圆柱面时，其计算面积等于其正投影面积。

3. 运用剪切与挤压的强度条件进行强度校核、确定许可载荷与设计截面尺寸的计算。

测试题

一、选择题

1. 校核图1-4-8所示结构中铆钉的剪切和挤压强度时，挤压面积是（　），剪切面积是（　）。

   A. $2dt$　　　B. $\pi d^2/4$　　　C. πdt　　　D. πd^2

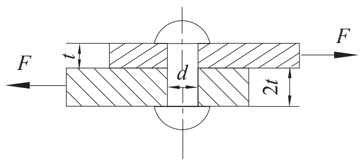


图 1-4-8

2. 在校核构件的抗剪强度和抗挤压强度时，当其中一个应力超过许用应力，构件的强度就（　）。

   A. 满足　　　B. 不满足　　　C. 无法确定

二、判断题

1. 当挤压面为圆柱形侧面时，挤压面的计算面积按该圆柱形侧面的正投影面积计算。（　）
2. 剪切与挤压同时产生时，构件强度要按剪切与挤压强度同时校核。（　）
3. 图1-4-9所示的两种铆接方式的强度是一样的。（　）

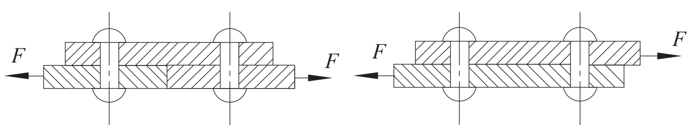


图 1-4-9

三、计算题

1. 图1-4-10所示为一螺栓联接。已知 $F=200\text{kN}$，厚度 $t=200\text{mm}$，钢板与螺栓材料相同，其许用切应力 $[\tau]$=80MPa，许用挤压应力 $[\sigma_{jy}]$=200MPa。试求螺栓所需的直径 d。

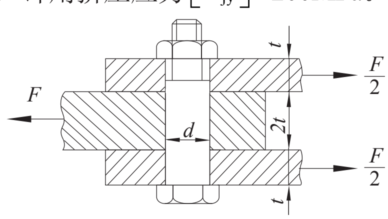


图 1-4-10

2. 图1-4-11所示为齿轮与轴通过平键连接，已知键受外力 $F=12\text{kN}$，所用平键的尺寸为 $b=28\text{mm}$，$h=16\text{mm}$，$l=60\text{mm}$，键的许用应力 $[\tau]=87\text{MPa}$，$[\sigma_{jy}]=100\text{MPa}$。试校核键的强度。

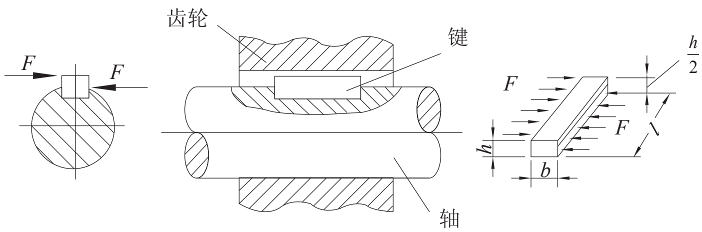


图 1-4-11

3. 如图1-4-12所示的联轴器，用四个螺栓连接，螺栓对称地安排在直径 $D=480\text{mm}$ 的圆周上。这个联轴器传递的力偶矩 $M=24\ \text{kN}\cdot\text{m}$，求螺栓的直径 d 需要多大？材料的许用切应力 $[\tau]$=80MPa（提示：由于对称，可假设各螺栓所受的剪力相等）。

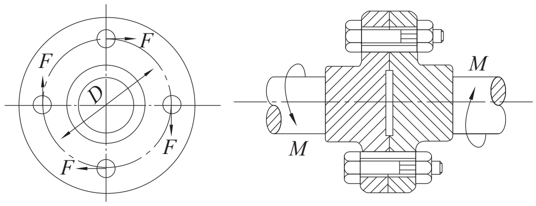


图 1-4-12

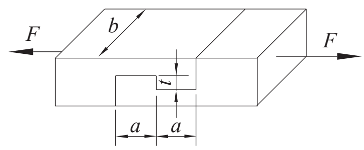


图 1-4-13

4. 如图1-4-13所示的两矩形木杆互相联接，已知宽为 $b=0.1\text{m}$。若载荷 $F=50\text{kN}$，木杆的许用切应力为 $[\tau]=1.5\text{MPa}$，许用挤压应力 $[\sigma_{\text{jy}}]=12\text{MPa}$，试求尺寸 a 和 t 。

5. 图1-4-14所示安全联轴器用销钉连接，允许传递的外力偶矩 $M=300\text{N}\cdot\text{m}$。销钉材料的抗剪强度极限 $\tau_{\text{b}}=320\text{MPa}$，轴的直径 $D=30\text{mm}$。为保证 $M\geqslant300\text{N}\cdot\text{m}$ 时安全销被剪断，问安全销钉的平均直径 d 应为多少？

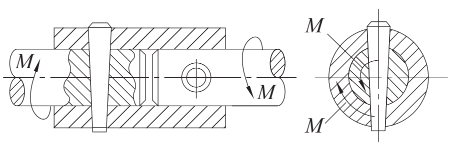


图 1-4-14

任务5 扭转强度计算

学习目标

1. 掌握外力偶矩的计算，绘制扭矩图。
2. 了解圆轴扭转时横截面上切应力的分布规律。
3. 掌握圆轴扭转时横截面上切应力的计算。
4. 掌握圆轴扭转的强度计算。

导入

观察汽车传动轴工作时的受力特点，如图1-5-1所示，前端受到发动机输出的主动力偶作用，另一端受到主减速器的阻抗力偶作用，传动轴将产生扭转变形。扭转变形是材料力学的基本变形之一，在实际工作中，机械传动中有许多构件是承受扭转的杆件，其受力特点、变形、强度计算等问题是如何思考与解决的?

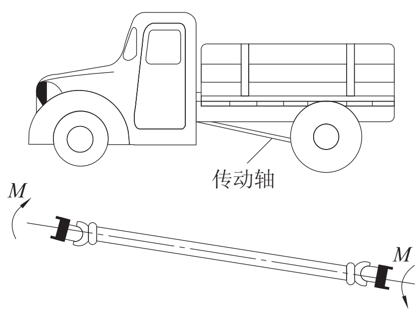


图 1-5-1 汽车传动轴

知识准备

一、扭转的概念

1. 轴的受力与变形特点

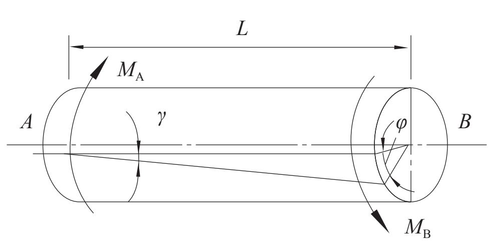


图 1-5-2 圆轴扭转的变形特点

工程中承受扭转的杆件通常称为轴。轴扭转变形时的受力特点是作用在轴两端的一对外力偶，大小相等、方向相反、作用面垂直于轴的轴线；其变形特点如图1-5-2所示，杆件的轴线保持

不变，各横截面绕轴线产生相对转动。轴的两端相对转过了φ角度。

2. 圆轴扭转时的外力偶矩计算

在工程上，作用于轴上的外力偶矩M，除了用“力×力臂”表示，在给出轴所传递的功率P和轴的转速n，也可求得轴上的外力偶矩M。功率P、转速n和外力偶矩M之间的关系如下式表示：

$$M = 9550\frac{P}{n} \tag{1-5-1}$$

式中功率P的单位为千瓦（kW），转速n的单位为转/分（r/min），外力偶矩M的单位为牛顿·米（N•m）。

3. 圆轴扭转时的内力

圆轴扭转时求内力思考的方法同拉压和剪切一样，也是用截面法求内力，再研究应力分布情况，通过计算导出强度条件。

如图1-5-3（a）所示，设轴AB在一对大小相等、转向相反的外力偶矩M作用下产生扭转变形；如图1-5-3（b）所示用截面法求内力偶矩，假想用$m-m$截面将轴AB截开分成两部分，任取一段；如图1-5-3（c）所示取左段为对象作受力分析，在截面$m-m$上分布的内力必然构成一个内力偶矩T，并且处于平衡状态。

内力偶 $T=+M$（按右手螺旋法则，图示内力偶矩T为正）。

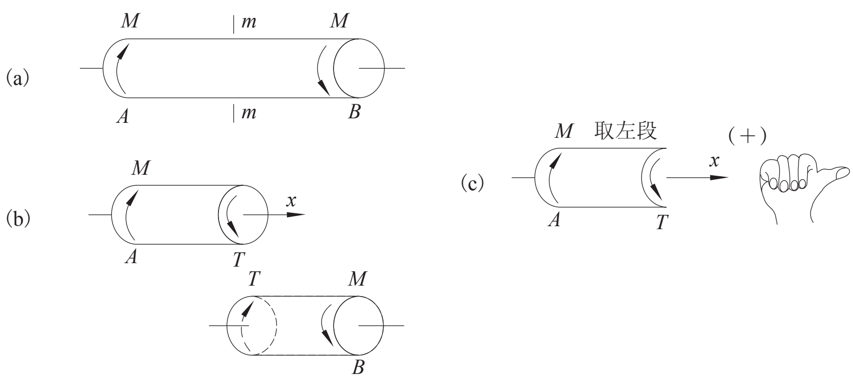
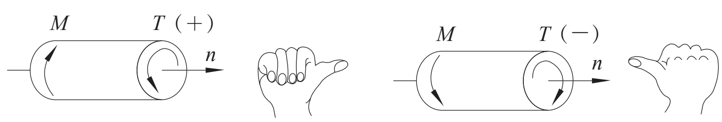


图 1-5-3 截面法求圆轴扭转时的内力

4. 圆轴扭转时的正负规定

右手螺旋法则：如图1-5-4所示，四指沿内力偶T转动方向，看大姆指的指向，若大姆指的指向离开截面时，则规定扭矩为正，反之若大姆指指向截面时则扭矩为负。



（a）大姆指指向离开截面的扭矩为正　　（b）大姆指指向截面的扭矩为负

图 1-5-4 圆轴扭转时的正负规定

5. 扭矩图

通常，扭转圆轴各横载面上的扭矩是不同的，为了确定各横截面的扭矩随截面位置变

化的规律，并确定轴上最大扭矩的位置，找出危险截面，以与轴线平行的x轴表示横载面位置，垂直于x轴的T轴表示扭矩，这样绘制$T=T(x)$图形称为扭矩图。

【例1-5-1】 一传动轴如图1-5-5所示，其转速n为300r/min，主动轮A的输入功率$P_A=220\text{kW}$。从动轮B、C的输出功率分别为$P_B=148\text{kW}$，$P_C=72\text{kW}$，试求轴AC段、AB段的扭矩，并作扭矩图。

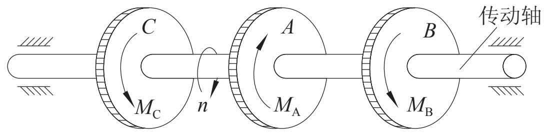


图 1-5-5

解：（1） 分析：轴上有多个外力偶矩，所以轴各段的扭矩是不相等的。

（2）计算各轮上的外力偶矩。

$$M_A=9550\frac{P_A}{n}=9550\times\frac{220}{300}=7\times10^3\ \text{N•m}$$

$$M_B=9550\frac{P_B}{n}=9550\times\frac{148}{300}=4.7\times10^3\ \text{N•m}$$

$$M_C=9550\frac{P_C}{n}=9550\times\frac{72}{300}=2.3\times10^3\ \text{N•m}$$

（3）应用截面法并按平衡条件计算轴AC段、AB段的内力偶矩T_{AC}、T_{AB}。

求轴AC段的内力偶矩T_{AC}：将轴AC段截开，取左段为对象作分析，如图1-5-6所示，所以$T_{AC}=-M_C=-2300\,\text{N•m}$。

求轴AB段的内力偶矩T_{AC}：将轴AB段截开，取左段为对象作分析，如图1-5-7所示，所以$T_{AB}=-M_C+M_A=-2300+7000=4700\,\text{N•m}$

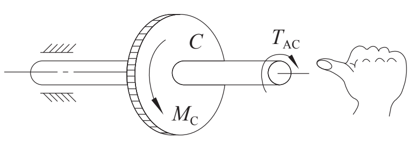


图 1-5-6 求AC段的T_{AC}

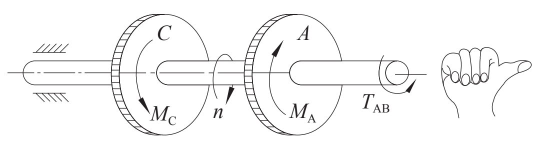


图 1-5-7 求AB段的T_{AB}

（注：也可以取右部分为对象作分析，同样得$T_{AB}=M_B=4700\ \text{N•m}$。）

（4）绘制扭矩图，如图1-5-8所示。

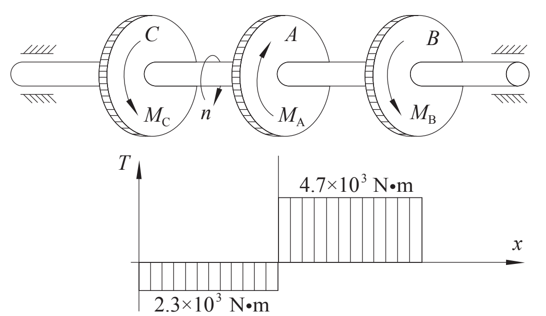


图 1-5-8 扭矩图

通过扭矩图可以清晰地看出，轴 AB 段承受的扭矩要大一些。

想一想： 在图1-5-5中若主动轮 A 与从动轮 C 位置变动一下，如图1-5-9所示，绘制的扭矩图会有什么变化？反映在轴上的承载情况又有怎样的变化？

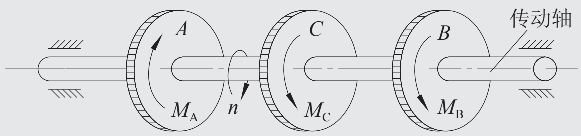


图 1-5-9

二、圆轴扭转时横截面上的切应力

1. 圆轴扭转时任一横截面上的切应力计算

分析圆轴扭转时的应力需结合扭转变形的变形特点，考虑三方面因素：几何变形、物理关系和静力学关系。如图1-5-10所示，在横截面上任意一点的切应力 τ_ρ 与扭矩 T 及该点至轴心的距离 ρ 成正比，与截面的极惯性矩 I_ρ 成反比。所以圆轴扭转时任一横截面上任意一点的切应力计算公式为：

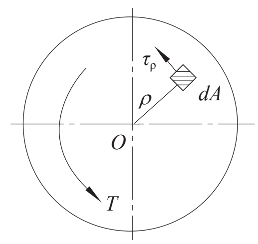


图 1-5-10 任一横截面上的切应力计算

$$\tau_\rho = \frac{T}{I_\rho}\rho \qquad (1\text{-}5\text{-}2)$$

式中 T 表示横截面上的扭矩，单位为 N•mm；ρ 表示所求应力点到轴心的距离，单位为mm；I_ρ 表示截面的极惯性矩，单位为mm^4；τ_ρ 表示横截面上任意一点的切应力，单位为MPa。

2. 最大切应力 τ_{max} 计算

当 $\rho=R$ 时，切应力达到最大值，即圆轴横截面边缘点的切应力最大。最大切应力 τ_{max} 为

$$\tau_{max} = \frac{TR}{I_\rho} \qquad (1\text{-}5\text{-}3)$$

令 $W_\rho = \frac{I_\rho}{R}$， 则 $\tau_{max} = \frac{T}{W_\rho}$

式中 W_ρ 表示抗扭截面系数，单位为mm^3；T 表示横截面上的扭矩，单位为 N•mm；τ_{max} 表示最大切应力，单位为MPa。

抗扭截面系数 W_ρ 只与截面形状、尺寸有关，不同的截面形状有不同的计算公式。

对于直径为 d 的实心圆轴，其极惯性矩 I_ρ、抗扭截面系数 W_ρ 计算式分别为：

$$I_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0.1d^4 \qquad (1\text{-}5\text{-}4)$$

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0.2d^3 \qquad (1\text{-}5\text{-}5)$$

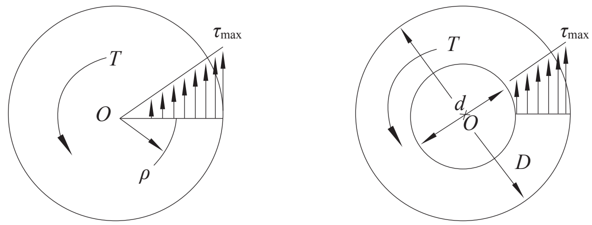
对于空心圆轴，设内径为 d，外径为 D，其内外直径比值 $a = d/D$；其 I_ρ、W_ρ 计算式分别为：

$$I_{\rho}=\frac{\pi D^{4}}{32}(1-a^{4})\approx 0.1D^{4}(1-a^{4}) \tag{1-5-6}$$

$$W_{\rho}=\frac{\pi D^{3}}{16}(1-a^{4})\approx 0.2D^{3}(1-a^{4}) \tag{1-5-7}$$

3. 圆轴扭转时横截面上的切应力分布规律

由1-5-2表明，圆轴扭转时横截面上任一点切应力τ_{ρ}与该点至轴心的距离ρ成正比，其方向垂直于半径，实心圆轴与空心圆轴横截面上切应力的分布如图1-5-11所示。



（a）实心圆轴　　（b）空心圆轴

图 1-5-11 圆轴扭转时横截面上的切应力分布规律

三、圆轴扭转的强度条件及应用

圆轴受到扭转变形后，产生最大切应力的横截面是最危险的。为了保证圆轴有足够的强度而不被破坏，要求圆轴工作时最大切应力不超过材料的许用切应力，即

$$\tau_{max}=\frac{T_{max}}{W_{\rho}}\leqslant[\tau] \tag{1-5-8}$$

上式称为圆轴扭转时的强度条件。其中，式中 $[\tau]$ 表示材料的许用切应力，单位为MPa；T_{max} 表示危险横截面上的扭矩，单位为 N•mm；W_{ρ}表示抗扭截面系数，单位为mm^3；τ_{max}表示最大切应力，单位为MPa。

应用圆轴扭转的强度条件，可以解决下述三类问题的强度计算：强度校核、设计截面尺寸、确定许用载荷。

【例1-5-2】如图1-5-12（a）所示，一钢制圆轴两端受外力偶 M 作用，已知 $M=2.5$ kN•m，直径$d=6$cm，许用应力$[\tau]=60$MPa，试校核该轴的强度。

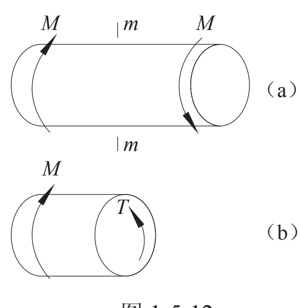


图 1-5-12

解：（1）计算轴的扭矩T，将轴在离左端任一距离处用 $m-m$ 截面切开，取左段为对象画出其受力图如图1-5-12（b）所示，求得 $m-m$ 截面上内力$T=M=2.5$ kN•m。

（2）校核该轴的强度。

$$\tau_{max}=\frac{T}{W_{\rho}}=\frac{16\times 2.5\times 10^{6}}{\pi\times 60^{3}}=59\text{MPa}<[\tau]=60\text{MPa}$$

结论：此轴满足强度要求。

【例1-5-3】如例1-5-1图1-5-5所示，所有参数同例1-5-1，已知材料的$[\tau]=60$MPa，试确定轴 AB 段与轴 AC 段的直径。

解：（1） 确定轴 AB 段的直径 d_{AB}。

已知轴 AB 段的扭矩为$T_{AB}=4700\ \text{N•m}$

$$\tau_{ABmax}=\frac{T_{AB}}{W_{AB\rho}}\leqslant[\tau] \qquad W_{AB\rho}\geqslant\frac{T_{AB}}{[\tau]}=\frac{4700\times10^3}{60}=78333\text{mm}^3$$

又因为$W_{AB\rho}\approx0.2d_{AB}^3$，所以$d_{AB}=\sqrt[3]{\frac{W_{AB\rho}}{0.2}}=\sqrt[3]{\frac{78333}{0.2}}=73.2\text{mm}$

所以，轴 AB 段的直径 d_{AB} 应大于73.2mm。

（2） 确定轴 AC 段的直径 d_{AC}。

已知轴 AC 段的扭矩为$|T_{AC}|=2300\ \text{N•m}$

$$W_{AB\rho}\geqslant\frac{T_{AC}}{[\tau]}=\frac{2300\times10^3}{60}=38333\text{mm}^3$$

又因为$W_{AC\rho}\approx0.2d_{AC}^3$，所以$d_{AC}=\sqrt[3]{\frac{W_{AC\rho}}{0.2}}=\sqrt[3]{\frac{38333}{0.2}}=57.7\text{mm}$

所以，轴 AC 段的直径 d_{AC} 应大于57.7mm。

【例1-5-4】如图1-5-1所示的汽车传动轴是由45号无缝钢管制成。轴的外径$D=90\text{mm}$，壁厚$t=2.5\text{mm}$，传递的最大力偶矩为$M=1.5\ \text{kN•m}$，材料的$[\tau]=60\text{MPa}$。要求：①校核轴的强度；②若改用相同材料的实心轴，并要求它和原轴的强度相同，试确定实心轴直径D_1；③比较实心轴和空心轴的重量。

解：（1）汽车传动轴为一等截面的直轴，所以传动轴各截面的扭矩为$T=M=1.5\ \text{kN•m}$轴的抗扭截面系数为

$$W_\rho=\frac{\pi D^3}{16}(1-a^4)=\frac{\pi\times90^3}{16}\left[1-\left(\frac{85}{90}\right)^2\right]\text{mm}^3=29280\text{mm}^3$$

轴的最大切应力为

$$\tau_{max}=\frac{T}{W_\rho}=\frac{1.5\times10^6\ \text{N•mm}}{29280\text{mm}^3}=51.2\text{MPa}<[\tau]=60\text{MPa}$$

结论：轴的强度足够安全。

（2）改用相同材料的实心轴，且与原轴的强度相同，即承受同样的最大切应力τ_{max}；确定实心轴的直径。

$$W_\rho=\frac{T}{\tau_{max}}=\frac{\pi D_1^3}{16}$$

解得 $D_1=53\text{mm}$

（3）因采用相同材料，设轴的长度相同，则由实心轴和空心轴的重量比较化为实心轴和空心轴的面积比较，即

$$\frac{G_1}{G}=\frac{\pi D_1/4}{\pi(D^2-d^2)/4}=\frac{53^2}{90^2-85^2}=3.2$$

计算结果表明，在承受同等载荷的条件下，空心轴比实心轴节省材料。因此，空心圆截面是圆轴扭转时的合理截面形状。但在工程上还要考虑很多其他因素，故实心圆轴的使用也非常普遍。

知识拓展

一、圆轴扭转时的刚度问题

1. 圆轴扭转时的变形

衡量扭转变形大小用两个截面间绕轴线旋转时的相对转角φ来表示，如图1-5-2所示，φ称为扭转角，单位为rad（弧度），计算式为

$$\varphi = \frac{TL}{GI_\rho} \tag{1-5-9}$$

式中GI_ρ称为抗扭刚度，它反映材料抵抗扭转变形的能力。

2. 圆轴扭转时的刚度计算

机器中某些轴类零件除要满足强度要求外，还要满足刚度要求，即要求轴在一定长度内扭转角不能超过一定限度。因此工程上采用单位长度内的扭转角θ来表示，圆轴扭转时的刚度条件为

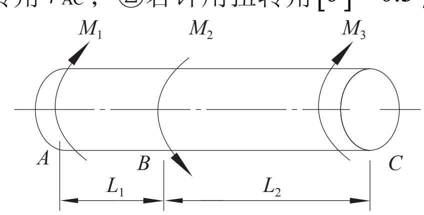
$$\theta = \frac{\varphi}{L} = \frac{T}{GI_\rho} \leqslant [\theta] \tag{1-5-10}$$

式中θ为单位长度扭转角，单位为rad/m。工程中常以$^\circ/\text{m}$为单位，所以上式也可写为

$$\theta = \frac{T}{GI_\rho} \times \frac{180^\circ}{\pi} \leqslant [\theta] \tag{1-5-11}$$

圆轴扭转时的刚度条件同样可以解决刚度校核、确定许可载荷和设计截面尺寸三类问题。为工作可靠，设计圆轴直径时，在满足强度和刚度的条件下，应该选取直径较大的值，确定许可载荷时要选取较小的值。

【例1-5-5】如图1-5-13（a）中，圆轴直径$d = 70\text{mm}$，$G = 80\text{GPa}$，$L_1 = 300\text{mm}$，$L_2 = 500\text{mm}$，扭转外力偶矩$M_1 = 955\ \text{N•m}$；$M_2 = 1592\ \text{N•m}$；$M_3 = 637\ \text{N•m}$。试求：①L_1与L_2两段横截面的相对扭转角φ_{AC}；②若许用扭转角$[\theta] = 0.3^\circ/\text{m}$，校核该轴刚度。



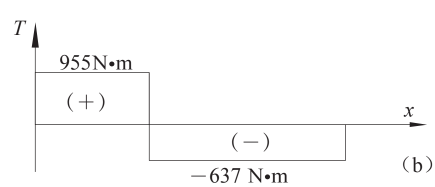


图 1-5-13

解：（1）计算扭矩，画出扭矩图。

用截面法求轴 AB 段、轴 BC 段的扭矩T_{AB}，T_{BC}

轴 AB 段：$T_{AB}=M_1=955\ \text{N·m}$

轴 BC 段：$T_{BC}=-M_3=-637\ \text{N·m}$

绘制扭矩图如图1-5-13（b）所示。

（2）求相对扭转角φ_{AC}。由于各段扭矩不同，且转动方向不同，所以应分段计算扭转角φ_{AB}、φ_{BC}，最后求和。即

$$\varphi_{AB}=\frac{T_{AB}L_1}{GI_\rho}=\frac{955\times10^3\times300\times32}{80\times10^3\times3.14\times70^4}=1.52\times10^{-3}\text{rad}$$

$$\varphi_{BC}=\frac{T_{BC}L_2}{GI_\rho}=\frac{-637\times10^3\times500\times32}{80\times10^3\times3.14\times70^4}=-1.69\times10^{-3}\text{rad}$$

所以$\varphi_{AC}=\varphi_{AB}+\varphi_{BC}=(1.52-1.69)\times10^3=-0.17\times10^3\text{rad}$

（3）校核刚度

从扭矩图看，轴 AB 段的扭矩大于轴 BC 段的扭矩，危险截面在轴 AB 段，因此对轴 AB 段进行刚度校核。

$$\theta=\frac{T_{AB}}{GI_\rho}\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{955\times10^3\times32}{80\times10^3\times3.14\times70^4}\times\frac{180^\circ}{\pi}=0.29\times10^{-3}\ {}^\circ/\text{m}\leqslant[\theta]=0.3\ {}^\circ/\text{m}$$

结论：此轴满足刚度要求。

二、提高圆轴抗扭能力的措施

轴是各种机器上的重要零件。汽车中的传动轴、变速箱中的输入轴、输出轴、驱动车轮的半轴等，各类机床设备的主轴，一般都是圆轴，工作中受到扭转变形时都有一个强度与刚度的问题。提高圆轴抗扭能力的措施主要有：

（1）合理安排转动零件位置，降低最大扭矩

将图1-5-5与图1-5-9中各轮的位置变动，就会发现 T_{max} 数值会发生变化。所以在其他条件不变的情况下，通过合理安排调整转动零件的位置，能达到降低最大扭矩 T_{max} 的目的，也就能减小最大切应力τ_{max}，使结构合理，工作安全。

（2）采用阶梯轴，使各轴段达到等强度的要求。

（3）选择合理的截面，提高轴的抗扭截面系数W_ρ。

根据扭转圆轴横截面上切应力分布规律，在圆心处，切应力为零，圆周边缘各点切应力最大。为充分利用材料，将实心轴的中心部分挖掉，做成空心轴，但横截面的强度并没有削弱多少，采用空心轴比实心轴节省材料，经济合理。但在工程上还要考虑很多其他因素，故实心圆轴的使用也非常普遍。

任务小结

1. 圆轴扭转是在力偶作用面垂直于轴线和平衡力偶系作用下产生的扭转变形。扭转圆轴横截面上切应力分布规律，切应力与该点到圆心的距离成正比，在圆心处，切应力为零，

圆周边缘各点切应力最大。

2. 圆轴扭转时的外力偶矩计算：$M = F \times d$；$M = 9550\,P/n$

圆轴扭转时的内力偶矩正负判断用右手螺旋法则。

3. 圆轴扭转时的强度条件为

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_{\rho}} \leqslant [\tau]$$

利用强度条件完成强度校核、确定许可载荷和确定截面尺寸三类计算问题。

4. 实心圆轴与空心圆轴的极惯性矩和抗扭截面系数：

实心圆轴：$I_{\rho} = \dfrac{\pi d^4}{32} \approx 0.1d^4 \qquad W_{\rho} = \dfrac{\pi d^3}{16} \approx 0.2d^3$

空心圆轴：$I_{\rho} = \dfrac{\pi D^4}{32}(1-a^4) \approx 0.1D^4(1-a^4)$

$W_{\rho} = \dfrac{\pi D^3}{16}(1-a^4) \approx 0.2D^3(1-a^4)$

测试题

一、选择题

1. 受扭转圆轴横截面上扭矩方向如图1-5-14中箭头所示，（ ）图中扭转切应力的分布是正确的。

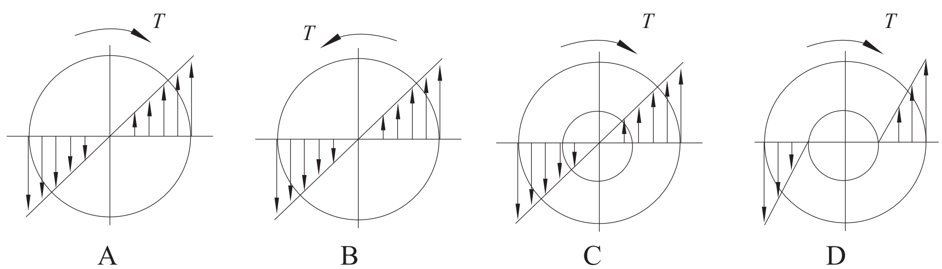


图 1-5-14

2. 传动轮系如图1-5-15所示，主动轮作用力矩$M_1 = 8\,\text{kN·m}$、从动轮作用力矩$M_2 = 4\,\text{kN·m}$、$M_3 = 3\,\text{kN·m}$、$M_4 = 1\,\text{kN·m}$，轮系安排合理的是（ ）。

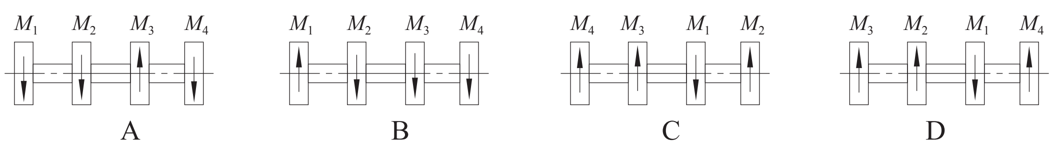


图 1-5-15

3. 变速箱中，通常高速轴的轴径小，而低速轴的轴径大，这是因为（ ）。

A. 传递的功率不同，高速轴的扭矩大，低速轴的扭矩小

B. 传递的功率相同，高速轴的扭矩小，低速轴的扭矩大

C. 作用的外力矩不同，高速轴的外力矩大，低速轴的外力矩小

D. 作用的外力矩相同，高速轴的外力矩小，低速轴的外力矩大

4. 空心圆截面的外径为 D 、内径为 d ，抗扭截面系数$W_\rho=$（ ）。

A. $\dfrac{\pi}{16}(D^3-d^3)$ B. $\dfrac{\pi}{32}(D^3-d^3)$ C. $\dfrac{\pi}{16}(D^4-d^4)$ D. $\dfrac{\pi D^3}{16}(1-a^4)$

5. 在图1-5-16所示的各轴中，仅产生扭转变形的是（ ）。

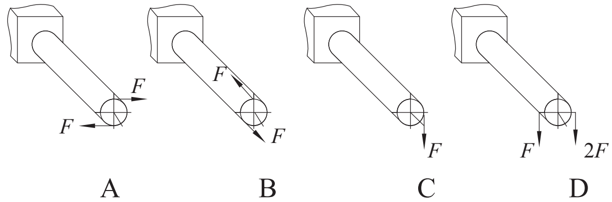


图 1-5-16

二、判断题

1. 空心圆轴扭转时其横截面上不存在切应力等于零的点。（ ）
2. 空心截面与实心截面比较，由于充分发挥了截面各点的承载能力，因此是扭转变形的合理截面形状。（ ）
3. 由于空心轴的承载能力大且节省材料，所以工程实际中的传动轴多采用空心截面。（ ）
4. 直径相同，而材料不同的两根轴，在相同的扭矩作用下，它们的最大切应力相同。（ ）

三、计算题

1. 圆轴的直径 $d=50\text{mm}$，转速 $n=120\text{r/min}$，若该轴横截面上最大的切应力$\tau_{max}=60\text{MPa}$，问圆轴传递的功率为多大？

2. 图1-5-17所示为一传动轴，转速 $n=200\text{r/min}$，轮 A 为主动轮，输入功率$P_A=60\text{kW}$，轮 B 、 C 、 D 均为从动轮，输出功率分别为$P_B=20\text{kW}$，$P_C=15\text{kW}$，$P_D=25\text{kW}$。

（1）试画出该轴的扭矩图；

（2）若将轮 A 和轮 C 位置对调，试分析对轴的受力是否有利。

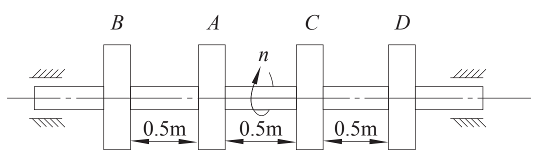


图 1-5-17

3. 阶梯轴 AB 如图1-5-18所示， AC 段直径$d_1=40\text{mm}$， CD 段直径$d_2=70\text{mm}$，外力偶矩$M_B=1500\ \text{N•m}$，$M_A=600\ \text{N•m}$，$M_C=900\ \text{N•m}$，$[\tau]=60\ \text{MPa}$，$[\theta]=2^\circ/\text{m}$。试校核轴的强度和刚度。

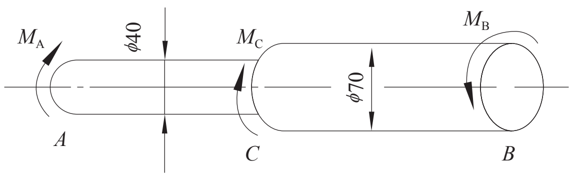


图 1-5-18

4. 如图1-5-19所示，输入轴A的转速$n = 120\,\mathrm{r/min}$，输入功率$P_A = 40\mathrm{kW}$，通过锥齿轮至输出轴B输出功率$P_B = 22\mathrm{kW}$，另一部分功率$P_C = 18\mathrm{kW}$由联轴器至轴C输出。已知锥齿轮的节圆直径$D_1 = 240\mathrm{mm}$，$D_2 = 600\mathrm{mm}$；各轴直径为$d_1 = 100\mathrm{mm}$，$d_2 = 80\mathrm{mm}$，$d_3 = 60\mathrm{mm}$，$[\tau] = 20\mathrm{MPa}$，试对各轴进行强度校核。

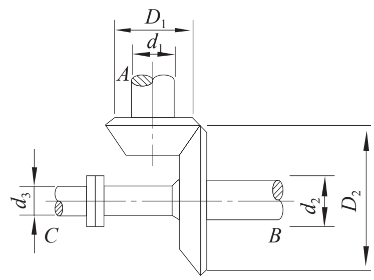


图 1-5-19

5. 如图1-5-20所示实心轴通过牙嵌离合器把功率传给空心轴。传递的功率$P = 7.5\mathrm{kW}$，轴的转速$n = 100\,\mathrm{r/min}$，试选择实心轴直径d和空心轴外径D。已知$a = d_1/D = 0.5$，$[\tau] = 40\mathrm{MPa}$。

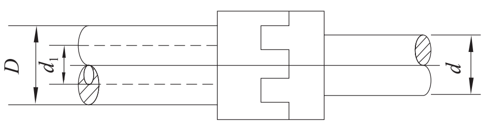


图 1-5-20

6. 汽车的驾驶盘如图1-5-21所示，驾驶盘的直径$D_1 = 520\mathrm{mm}$，驾驶员每只手作用于盘上的最大切向力$F = 200\mathrm{N}$，转向轴材料的许用切应力$[\tau] = 50\mathrm{MPa}$，试设计实心转向轴的直径。若改为$a = d/D = 0.8$的空心轴，则空心轴的内径和外径各多大？试比较两者的重量。

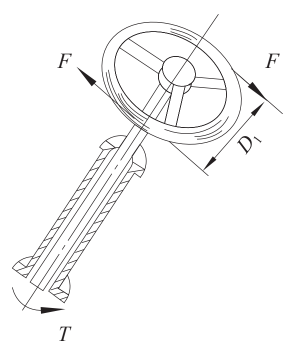


图 1-5-21

任务6 弯曲强度计算

学习目标

1. 了解平面弯曲的概念、平面弯曲的剪力和弯矩。
2. 掌握梁的剪力方程和弯矩方程、绘制剪力图和弯矩图，求$|M_{\max}|$。
3. 掌握纯弯曲梁的强度计算。
4. 了解提高梁强度的措施。

导入

如图1-6-1所示的梁，采用了同样的材料，相同的截面积，但因梁的横截面放置的形式不同，其承载的能力也会产生较大差异。观察汽车底盘的大梁，其横截面是怎样的？并听听汽车业内人士是如何评价不同品牌汽车底盘的“扎足”。

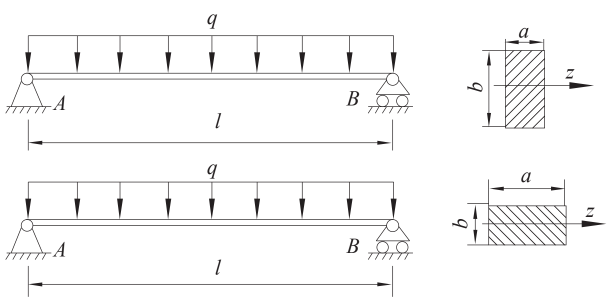


图 1-6-1 梁不同放置形式的截面

知识准备

一、平面弯曲

1. 平面弯曲的概念

杆件的弯曲变形是工程中常见的五种基本变形形式之一。如图1-6-2所示的车辆的前桥、后桥，起重机的大梁等。

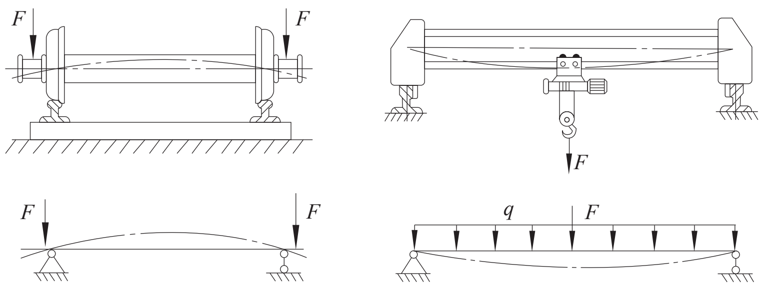
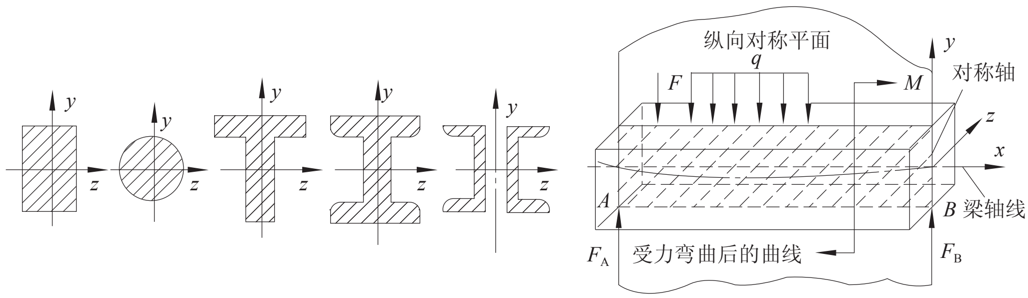


图 1-6-2 弯曲变形

弯曲变形指作用于杆件上的外力垂直于杆件的轴线，使轴线产生变形由直线变为曲线，以弯曲变形为主的杆件称为“梁”。

工程上绝大多数的梁，其横截面都有一根对称轴，如图1-6-3（a）所示。通过梁轴线和横截面对称轴的平面称为纵向对称平面，当梁上的外力都作用于纵向对称平面内时，梁的轴线将弯曲成一条仍位于纵向对称平面内的平面曲线，如图1-6-3（b）所示，这种情况下的弯曲变形称为平面弯曲，本任务仅讨论梁的平面弯曲。



（a）梁各种横截面的对称轴　　（b）梁的平面弯曲

图 1-6-3 平面弯曲

2. 梁的基本形式

梁的支座反力能用静力平衡方程求得称为静定梁，静定梁可分为以下三种基本形式：

（1）简支梁。梁的一端是固定铰链支座，另一端是活动铰链支座，如图1-6-4（a）所示；

（2）外伸梁。具有一个或两个外伸端的简支梁，如图1-6-4（b）所示；

（3）悬臂梁。梁的一端固定，另一端自由，如图1-6-4（c）所示。

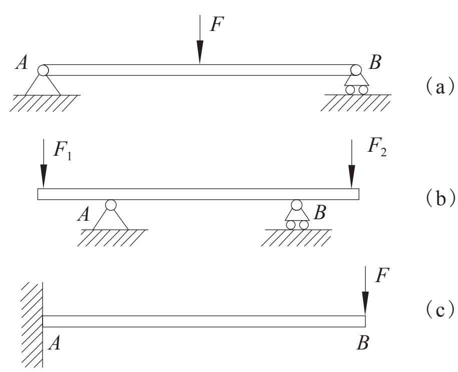


图 1-6-4 梁的基本形式

3. 用截面法求梁任一截面的内力：剪力和弯矩

（1）用截面法求梁的截面 $m-m$ 处的内力：剪力 F_N 和弯矩 M

同前面分析方法一样，用截面法研究梁的内力，进行受力分析，如图1-6-5（a）所示简支梁，作用有力 F 而处于平衡状态。假想将梁 $m-m$ 处的横截面截开，分为左右两段，任

取一段（本图取左段）为对象作受力分析，求横截面 $m-m$ 处的剪力 F_N 和弯矩 M 。

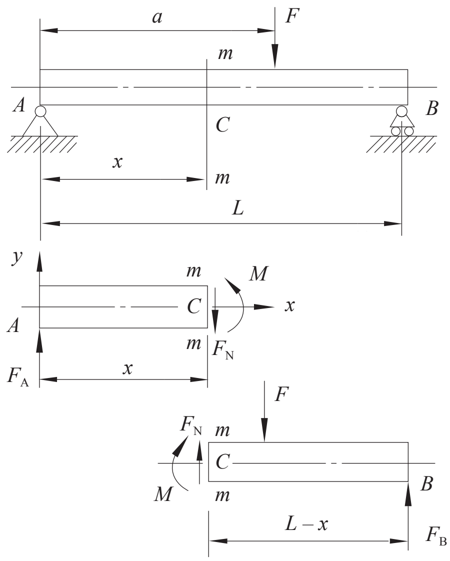


图 1-6-5 截面法求梁的内力

解：①进行受力分析，列平衡方程，求支座反力 F_A 、 F_B 。

$$\Sigma M_B = 0，\quad F_A L - F(L-a) = 0，解得 F_A = \frac{F(L-a)}{L}$$

$$\Sigma M_A = 0，\quad F_B L - Fa = 0，解得 F_B = \frac{Fa}{L}$$

②用截面法求梁 $m-m$ 处横截面的内力，受力分析如图1-6-5（b）所示。

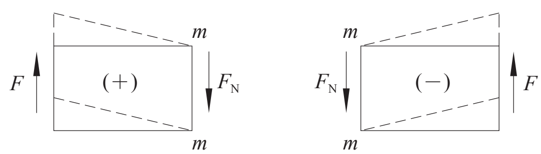
$$F_N = F_A = \frac{F(L-a)}{L}$$

$$M = F_N \times x$$

同样，若取右边为对象作受力分析，如图1-6-5（c）所示，可得出同样的结论。

（2）对剪力 F_N 和弯矩 M 正、负的规定

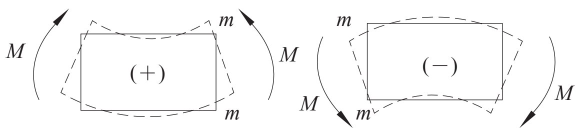
对剪力 F_N 正、负的规定如图1-6-6所示：由于 F 的作用产生左上右下的错动趋势为正，反之产生右上左下的错动趋势为负。所以在图1-6-5（b）中，由 F_A 作用对横截面 $m-m$ 处产生的剪力 F_N 为正值。



（a）左上右下为正　　（b）右上左下为负

图 1-6-6 剪力 F_N 的正、负规定

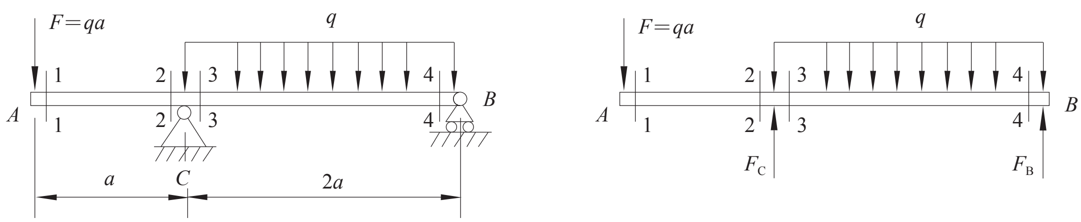
对弯矩M的正、负规定如图1-6-7所示：由外载荷的作用产生上凹下凸变形趋势的为正，反之产生上凸下凹变形趋势的为负。所以在图1-6-5（b）中，由 F_A 作用对横截面 $m-m$ 处产生的弯矩 M 为正值。



（a）上凹下凸为正　　（b）上凸下凹为负

图 1-6-7 弯矩 M 的正、负规定

【例1-6-1】外伸梁如图1-6-8（a）所示，试求图中指定截面上的剪力和弯矩。设 q 、 a 均为已知。



（a）外伸梁　　（b）受力分析图

图 1-6-8

分析：截面1-1表示位于集中力 F 作用处 A 的右侧，与力 F 的间距趋于无穷小，同理截面2-2、3-3表示位于支座 C 的左、右侧，与支座 C 的间距趋于无穷小，截面4-4位于支座 B 左侧，与支座 B 的间距趋于无穷小。

解：①作受力分析如图1-6-8（b）所示。

②列平衡方程求约束力 F_B 、 F_C 。

由$\Sigma M_C=0$，解得$F_B=\dfrac{1}{2}qa$；　　由$\Sigma F_y=0$，解得$F_C=\dfrac{5}{2}qa$

③取左段梁为对象，求截面1-1处剪力 F_{1-1} 和弯矩 M_{1-1} 。

$F_{1-1}=-F=-qa \qquad M_{1-1}=0$

取左段梁为对象，求截面2-2处剪力 F_{2-2} 和弯矩 M_{2-2} ：

$F_{2-2}=-F=-qa \qquad M_{2-2}=-F\times a=-qa^2$

取左段梁为对象，求截面3-3处剪力 F_{3-3} 和弯矩 M_{3-3} ：

$F_{3-3}=-F+F_B=-qa+2.5qa=1.5qa \qquad F_{3-3}=-F\times a=-qa^2$

取右段梁为对象，求截面4-4处剪力 F_{4-4} 和弯矩 M_{4-4} ：

$F_{4-4}=-F_C=-\dfrac{1}{2}qa \qquad M_{4-4}=0$

二、剪力图和弯矩图

1. 梁的剪力方程和弯矩方程

在例1-6-1中对梁指定截面 $m-m$ 处的剪力和弯矩进行了求解，但梁横截面的剪力和弯矩一般随截面的位置变化而变化。为了描述其变化规律，用坐标 x 表示横截面沿梁轴线的

位置，而将各横截面上的剪力和弯矩表示为坐标 x 的函数。即

$$\begin{cases} F_N = F_N(x) \\ M = M(x) \end{cases} \tag{1-6-1}$$

上述两式即为梁的剪力方程和弯矩方程。

2. 绘制剪力图和弯矩图

为了直观地表示梁各横截面上的剪力 F_N 和弯矩 M 沿梁长的轴线变化的情况，可用图形来表示这种变化，这种图分别称为剪力图和弯矩图。

【例1-6-2】如图1-6-9所示悬臂梁，受均布载荷 q 的作用，试列出梁的剪力方程和弯矩方程，绘制剪力图和弯矩图，求最大剪力 $|F_{Nmax}|$ 和最大弯矩 $|M_{max}|$，设 q 、l 已知。

解：（1）作受力分析，如图1-6-10（a）所示。

列平衡方程求约束力 F_A 、M_A ：

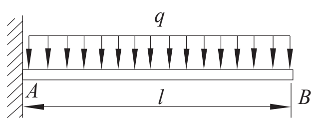


图 1-6-9

$\sum F_y = 0$，$F_A - ql = 0$，解得$F_A = ql$

$\sum M_A = 0$，$M_A - \frac{1}{2}ql^2 = 0$，解得 $M_A = \frac{1}{2}ql^2$

（2）列剪力方程和弯矩方程。

取距原点为 x 的左段，如图1-6-10（b）所示。

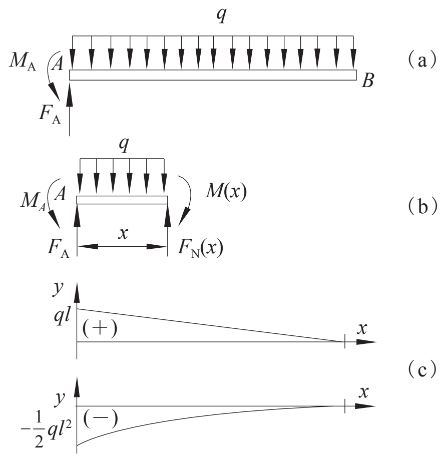


图 1-6-10 受力分析及剪力弯矩图

列剪力方程$F_N(x)$和弯矩方程$M(x)$：

$$F_N(x) = F_A - qx = -qx + ql$$

$$M(x) = -M_A + F_A x - \frac{1}{2}qx^2 = -\frac{1}{2}qx^2 + qlx - \frac{1}{2}ql^2 \qquad (0 < x < l)$$

当 $x = 0$ 时：$F_N(0) = ql \quad M(0) = -\frac{1}{2}ql^2$

当 $x = l$ 时：$F_N(l) = 0 \qquad M(l) = 0$

（3）绘制剪力图和弯矩图，如图1-6-10（c）所示。

（4）求最大剪力 $|F_{Nmax}| = ql$ ；最大弯矩 $|M_{max}| = \frac{1}{2}ql^2$ 。

三、利用弯矩、剪力和载荷集度间的关系画剪力图和弯矩图

从均布载荷、集中力、力偶作用处内力的变化规律，可以将剪力图、弯矩图和梁上载荷三者之间一些常见的规律如表1-6-1所示。

表 1-6-1 F_N、M 图特征表

载荷类型	无载荷段 $q(x)=0$			均布载荷段 $q(x)=C$		集中力		集中力偶	
				$q<0$	$q>0$	F C	C F	M_O C	M_O C
F_N图	水平线			倾斜线		产生突变 F	F	无影响	
M图	$F_N>0$	$F_N=0$	$F_N<0$	二次抛物线，$F_N=0$处有极值		在C处有折角		产生突变	
	倾斜线	水平线	倾斜线			C	C	M_O	M_O

利用表1-6-1指出的规律，掌握弯矩、剪力和载荷集度间的关系，可以不必再列出剪力方程和弯矩方程，有助于直接正确简捷地绘制剪力图和弯矩图，同时也可检查已绘制好的剪力图和弯矩图，判断其正误。

【例1-6-3】利用M，F_N，q之间的关系，画出如图1-6-11（a）所示简支梁的剪力图和弯矩图，求最大剪力$|F_{Nmax}|$，最大弯矩$|M_{max}|$。

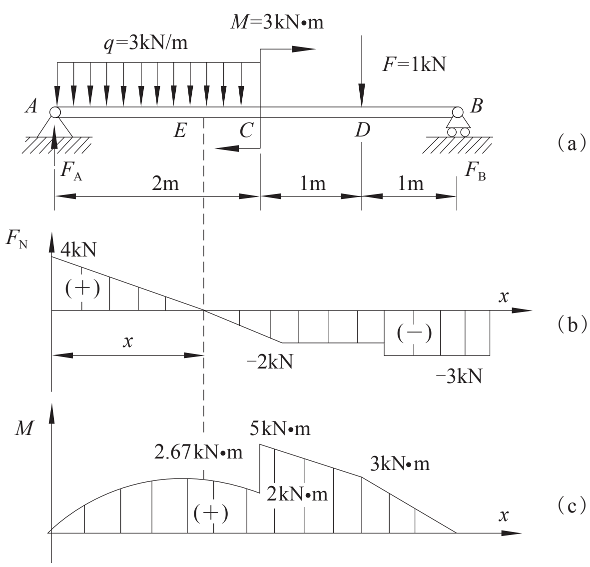


图 1-6-11 利用M，F_N，q之间的关系作剪力图、弯矩图

解：（1）取梁AB为对象作受力分析，列平衡方程求支座反力F_A、F_B。

$\Sigma M_A(F)=0$，$F_B\times 4\text{m}-q\times 2\text{m}\times 1\text{m}-M-F\times 3\text{m}=0$，解得$F_B=3\text{kN}$

$\Sigma F_y=0$，$F_A+F_B-q\times 2\text{m}-F=0$，解得$F_A=4\text{kN}$

（2）利用M，F_N，q间的关系作剪力图。

①在A点，因F_A(↑)的作用，剪力图向上突变，F_N图(↑)4kN。

②在 AC 段，在$q(\downarrow)$的作用下，剪力图向下倾斜直线，计算 C^- 处的剪力 F_{C^-}：

$F_{C^-}=F_A-q\times2\text{m}=4-3\times2=-2\text{kN}$，其中存在剪力 q 为零之处。

③在 CD 段为无载荷段，剪力图为水平线。

④在 D 点，$F=1\text{kN}$（$\downarrow$）的作用，剪力图向下突变1kN，F_N 图$(\downarrow)$达 -3kN。

⑤在 CD 段为无载荷段，剪力图为水平线。

⑥在 B 点，因$F_B(\uparrow)$的作用，剪力图向上突变，F_N 图$(\uparrow)$3kN，回到 x 轴。

⑦绘制剪力图如图1-6-11（b）所示。

（3）利用 M 、F_N 、q 间的关系作弯矩图。

①在 A 点，因 $F_A\uparrow$ 的作用，弯矩图为向上倾斜直线。

②在 AC 段，在 $q\downarrow$ 的作用下，弯矩图为开口向下的二次函数曲线，计算 C^- 处的弯矩 M_{C^-}：

$$M_{C^-}=F_A\times2\text{m}-\frac{1}{2}q\times2^2=4\times2-\frac{1}{2}\times3\times2^2=2\text{ kN}\cdot\text{m}$$

观察 AC 段剪力图，剪力图与 x 轴有一交点，表示 $F_N=0$ 处存在极值。

作 AC 段的弯矩方程$M(x)=F_A\times x-\frac{1}{2}qx^2$，对弯矩方程求导并令其等于零得：

$$F_A-qx=0,\quad x=\frac{F_A}{q}=\frac{4}{3}=1.33\text{m}$$

所以该点的弯矩值为：$M(1.33)_{\max}=4\times1.33-\frac{1}{2}\times3\times1.33^2=2.67\text{ kN}\cdot\text{m}$

③在C点，有一顺时针转动M的作用，弯矩图向上突变$3\text{ kN}\cdot\text{m}$，$M_C(\uparrow)$至$5\text{ kN}\cdot\text{m}$；

④在CD段，观察CD段的 F_N 图为无载荷段，M图为倾斜直线，计算D处的弯矩M_D：

$$M_D=F_A\times3\text{m}+M-q\times2\text{m}\times2\text{m}=4\times3+3-3\times2^2=3\text{ kN}\cdot\text{m}$$

⑤在DB段，D点有 $F\downarrow$ 的作用，M图在D点处产生向下折角，弯矩图为倾斜直线，计算B点的弯矩，$M_B=0$，所以弯矩图回到 x 轴。

⑥绘制弯矩图如图1-6-11（c）所示（边计算边完成剪力图和弯矩图）。

（4）求最大剪力$|F_{\text{Nmax}}|$，最大弯矩$|M_{\max}|$。

观察剪力图和弯矩图得：$|F_{\text{Nmax}}|=4\text{kN}$，$|M_{\max}|=5\text{ kN}\cdot\text{m}$

做一做：对照表1-6-1，边分析边计算边完成剪力图和弯矩图。注意上述计算的目标，就是要求得$|M_{\max}|$，确定危险截面。

四、梁的正应力强度条件及计算

1. 纯弯曲的概念

从前述中知道，一般情况下，梁的横截面上既有剪力又有弯矩，这种弯曲称为横力弯曲。实验表明，当梁较为细长时，存在最大弯矩的截面是危险截面，该截面上的正应力是决定梁是否破坏的主要因素，将横截面上只有弯矩而无剪力所产生的弯曲称为纯弯曲，下

面将分析纯弯曲梁横截面上的正应力。

2. 弯曲变形特征

为了解梁的变形规律作平面弯曲试验，如图1-6-12所示，从试验中可看到，梁产生平面纯弯曲后，各纵向线变成曲线，靠近梁底面的纵线伸长，靠近顶面的纵线缩短。横线仍保持直线，只是相对转了一个角度，但与变形后的纵线垂直。纯弯曲梁的横截面在变形前为平面，变形后仍为平面。

根据上述现象，两对梁的变形提出如下假设：假设梁由许多纵向纤维组成，说明梁弯曲后顶面上的纵向纤维缩短受压应力，梁底面的纵向纤维伸长受拉应力，梁中存在一个层，其纵向纤维既不缩短也不伸长，该层称为中性层，中性层与梁横截面的交线称为中性轴。

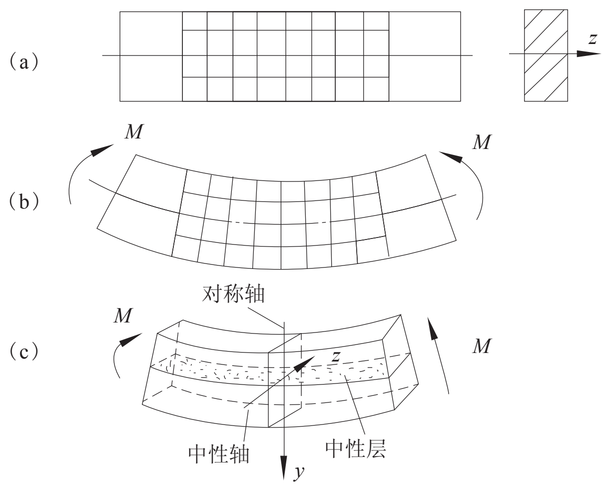


图 1-6-12 纯弯曲的变形

3. 梁横截面上的正应力分布规律

如图1-6-13所示，正应力沿横截面高度方向按直线规律变化，中性轴上各点处的正应力都为零，离中性轴越远的点，其正应力越大。

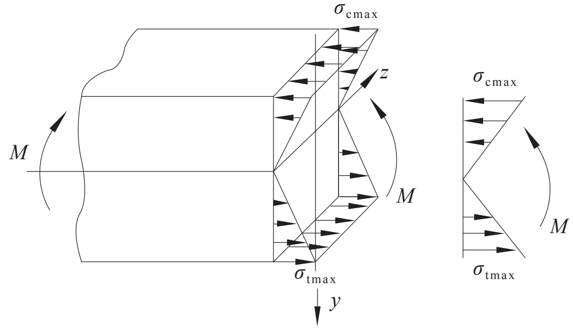


图 1-6-13 梁横截面上的正应力分布规律

4. 正应力的计算

（1）应力公式

如图1-6-14所示，梁上任一截面任一点处的正应力的计算

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \tag{1-6-2}$$

式中 M 表示横截面上的弯矩，单位为 N•mm；y表示所求正应力点到中性轴 z 的距离，单位为mm；I_z 表示横截面对中性轴 z 的惯性矩，单位为mm^4；σ表示正应力，单位为MPa。

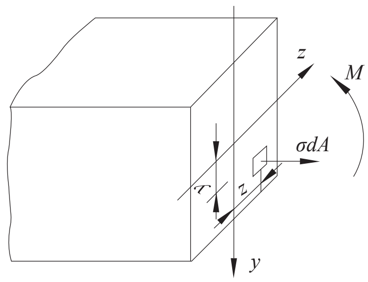


图 1-6-14 任一点处的正应力的计算

（2）梁上危险截面的最大正应力的计算式

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}| y_{max}}{I_z} \tag{1-6-3}$$

式中 M_{max} 表示梁危险截面的弯矩，单位为 N•mm； y_{max} 表示危险截面上离中性轴距离最远的各点，单位为mm；I_z 表示横截面对中性轴 z 的惯性矩，单位为mm^4；σ_{max}表示最大正应力，单位为MPa。

上式中，令 $W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$，最大正应力可表示为：

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{W_z} \tag{1-6-4}$$

式中 W_z 表示横截面对中性轴 z 的抗弯截面系数，与横截面的形状、尺寸有关，单位为mm^3；对于矩形截面的梁，如图1-6-15（a）所示，极惯性矩 I_z、抗扭截面系数 W_z 计算式分别为：

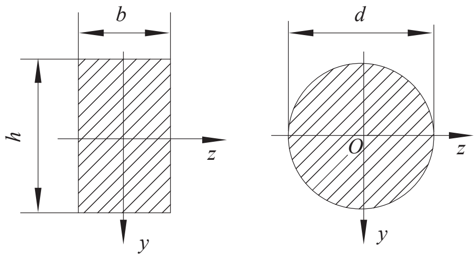
$$I_z = \frac{bh^3}{12} \tag{1-6-5}$$

$$W_z = \frac{bh^2}{6} \tag{1-6-6}$$

对于圆形截面的梁，如图1-6-15（b）所示，极惯性矩 I_z、抗扭截面系数 W_z 计算式分别为：

$$I_z = \frac{\pi d^4}{64} \tag{1-6-7}$$

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32} \tag{1-6-8}$$



（a）矩形截面　（b）圆形截面

图 1-6-15 常用截面

5. 梁的弯曲正应力强度计算

对等截面梁，最大正应力发生在梁的危险截面顶面与底面的边缘处，为了保证梁能正常工作，必须使梁横截面上的最大正应力不超过材料的弯曲许用应力$[\sigma]$，所以梁的弯曲正应力强度条件为

$$\sigma_{\max}=\frac{|M_{\max}|}{W_z}\leqslant[\sigma] \tag{1-6-9}$$

本式适用于抗拉和抗压能力相同的材料，对于像铸铁等之类的脆性材料，因抗拉和抗压能力的不同，即许用拉应力$[\sigma_t]$和许用压应力$[\sigma_c]$的不同，应分别建立拉应力和压应力的强度条件。

$$\sigma_{\text{tmax}}=\frac{|M_{\max}|}{W_z}\leqslant[\sigma_t] \tag{1-6-10}$$

$$\sigma_{\text{cmax}}=\frac{|M_{\max}|}{W_z}\leqslant[\sigma_c] \tag{1-6-11}$$

式中$M_{\max}$表示梁危险截面的弯矩，单位为N•mm；W_z表示横截面对中性轴z的抗弯截面系数，单位为mm^3；σ_{tmax}、σ_{cmax}表示最大拉应力和最大压应力，单位为MPa。

应用梁的弯曲的强度条件，可解决工程中强度校核、确定许用载荷、设计截面尺寸三类问题的强度计算。

【例1-6-4】 如图1-6-16所示的简支梁，已知梁上作用的均布载荷$q=2.4$kN/m，$l=4$m，$[\sigma]$=150MPa，试确定正方形截面与矩形截面（$h=2b$）的尺寸，并比较它们截面积的大小。

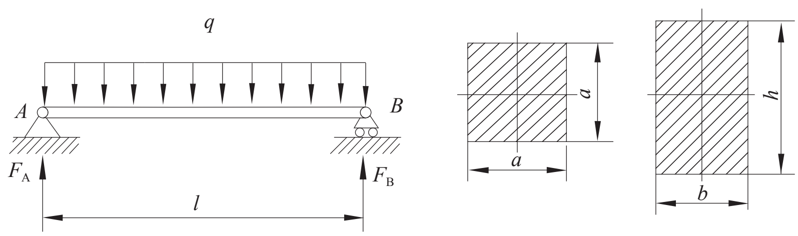


图 1-6-16

解：（1）取梁AB为对象作受力分析，列平衡方程求支座反力F_A、F_B：

因图形对称，所以$F_A=F_B=\frac{1}{2}ql=\frac{1}{2}\times2.4\times4=4.8$kN。

（2）分析判断危险截面在梁的中点，所以最大弯矩：

$$M_{\max} = F_A \times \frac{l}{2} = 4.8 \times 2 = 9.6\,\text{kN·m}$$

（3）确定正方形截面的尺寸

$$W_z \geqslant \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{9.6 \times 10^6\,\text{N·mm}}{150\text{MPa}} = 64000\text{mm}^3，\ W_z = \frac{a^3}{6} = 64000\text{mm}^3$$

所以，正方形截面的边长 $a = 72.7\text{mm}$，正方形的面积为5285 mm^2。

（4）确定矩形截面的尺寸。

$$W_z = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \times (2b)^2}{6} = 64000\text{mm}^3，得\ b = 45.8\text{mm}，\ h = 91.6\text{mm}$$

矩形的面积为4195 mm^2。

所以同等的承载能力，正方形的截面积要大于矩形的截面积。

【例1-6-5】 如图1-6-17（a）所示的汽车钢板弹簧，由10块宽度 $b = 75\text{mm}$、厚度 $\delta = 10\text{mm}$ 的板条组成，$[\sigma] = 400\text{MPa}$，试求许可载荷 $[F]$。

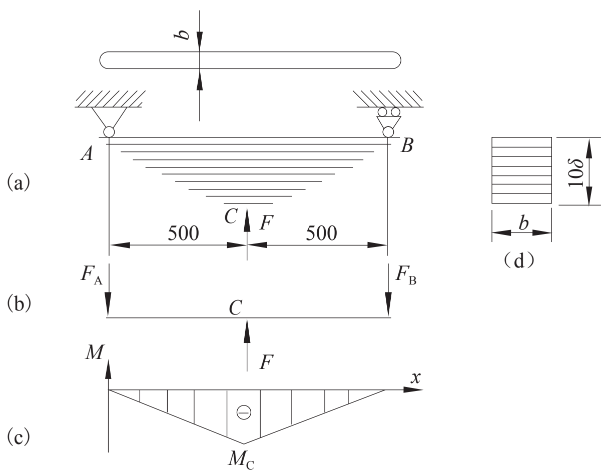


图 1-6-17

解：（1）对钢板弹簧作受力分析，画受力分析图，如图1-6-17（b）所示。

列平衡方程，求约束反力 F_A、F_B。

因图形对称，所以 $F_A = F_B = F/2$

（2）画钢板弹簧的弯矩图，如图1-6-17（c）所示。求得最大弯矩 $|M_C|$。

危险截面在中点 C 处。

$$M_C = -F_A \times 500 = -250F(\text{N·mm})$$

（3）求危险截面 C 处的抗弯截面系数 W_z。

C 处截面如图1-6-17（d）所示，由10个矩形小截面叠成，其抗弯截面系数 W_z 为 $W_z = bh^2/6 = b(10\delta)^2/6 = 75 \times (10 \times 10)^2/6 = 125000\,\text{mm}^3$。

（4）根据强度条件，确定许可载荷 $[F]$。

由 $\sigma_{\max} = \dfrac{|M_{\max}|}{W_z} \leqslant [\sigma]$，得 $|M_C| \leqslant W_z[\sigma]$，所以 $[F] \leqslant W_z[\sigma]/250$

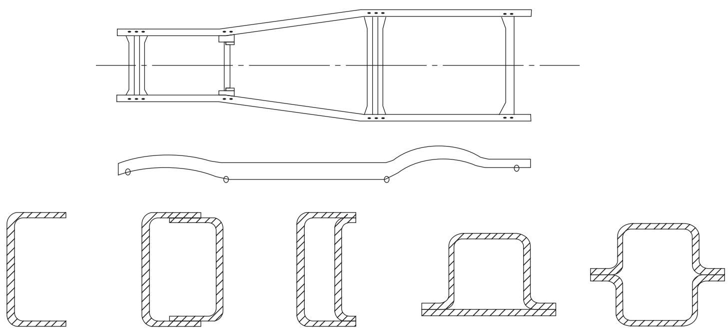
$[F] \leqslant W_z[\sigma]125000 \times 400 \div 250 = 200000\text{N} = 200\text{kN}$

结论：汽车钢板弹簧的许可载荷$[F]$≤200kN。

知识拓展

一、其他截面梁的强度问题简介

工程中对梁的横截面的形状设计极为重视，如常见的横截面有采用工字形或T形的梁，在满足强度要求的条件下，既节省材料又极大减轻结构的重量。汽车车架纵梁的截面形状有很多种，常见的如图1-6-18所示，综合考虑车架的强度问题、结构重量、空间布置等许多因素。



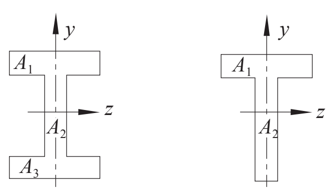
（a）槽形　（b）叠槽形　（c）叠槽形　（d）礼帽箱形　（e）对接箱形

图 1-6-18 汽车车架纵梁的截面形状

梁的正应力强度条件为$\sigma_{\max} = \dfrac{|M_{\max}|}{W_z} \leqslant [\sigma]$ 或$\sigma_{\max} = \dfrac{|M_{\max}|y_{\max}}{I_z} \leqslant [\sigma]$。

与截面形状有关的参数是：极惯性矩I_z与抗弯截面系数W_z，所以工程中对于比较复杂截面形状的强度问题计算是确定复杂截面的极惯性矩I_z与抗弯截面系数W_z。常用的确定I_z与W_z的方法主要有两种：

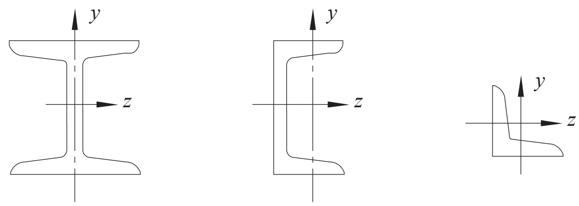
（1）横截面由简单图形组合而成的组合图形，如图1-6-19所示的工字形横截面由三个矩形图形组合而成，T形横截面由两个矩形图形组合而成。因为中性轴z不可能通过各个组成部分的形心，如图1-6-19（a）的工字形图形中性轴z通过A_2的形心，但没有通过A_1与A_3的形心，如图1-6-19（b）的T形图形中性轴z既没有通过A_1也没有通过A_2的形心，所以对图1-6-19（a）的工字形图形要用到二次移轴公式求极惯性矩I_z，对图1-6-19（b）的T形图形，先求形心确定中性轴z的位置，再用二次移轴公式求极惯性矩I_z。



（a）工字形截面　　（b）T形截面

图 1-6-19 组合图形横截面

（2）工程中，很多梁也直接选用如图1-6-20所示的型钢制造，对于型钢的极惯性矩 I_z 和抗弯截面系数 W_z，可以直接查阅有关的机械设计手册得到。



（a）工字钢截面　（b）槽钢截面　（c）角钢截面

图 1-6-20 型钢的横截面

【例1-6-6】如图1-6-21（a）所示的简支梁，已知梁上作用有均布载荷为 $q=10\text{kN/m}$，材料的许用应力$[\sigma]$=160MPa；采用16号工字钢，校核梁的强度；若采用矩形梁确定梁的截面积，b:h =1:2；并与16号工字钢的截面积作一比较。

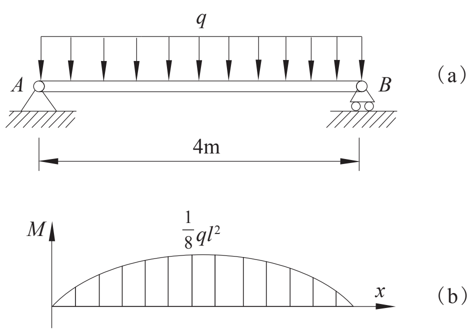


图 1-6-21 简支梁

解：（1）梁的弯矩图如图1-6-21（b）所示，最大弯矩为：

$$M_{\max}=ql^2/8=10\times4^2/8=20\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

（2）查机械设计手册：16号工字钢 $W_z=141\times10^3\ \text{mm}^3$，横截面积 $A_1=2610\ \text{mm}^2$。

（3）校核梁的强度：

$\sigma_{\max}=\dfrac{|M_{\max}|}{W_z}=\dfrac{20\times10^6}{141\times10^3}=141.8\text{MPa}\leqslant[\sigma]=160\ \text{MPa}$，符合强度要求（安全）。

（4）确定矩形梁的截面积，采用矩形梁并且$\sigma_{\max}=141.8\ \text{MPa}$时，达到同样的承载能力。

$W_z=141\times10^3\ \text{mm}^3=bh^2/6=2b^3/3$，解得：$b=59.6\ \text{mm}$，$h=119.2\ \text{mm}$

矩形梁的截面积 $A_2=59.6\times119.2=7104.3\ \text{mm}^2$。

结论：显然同样的承载能力，工字钢梁用的材料要省很多。

二、提高梁强度的主要措施

在设计梁的结构时，既要保证杆件具有足够的承载能力，又要尽量节省材料，减轻结构件重量，一般可采用以下几种措施来提高杆件的强度和刚度。

1. 合理安排梁的支座

在梁的尺寸和截面形状已定的条件下，合理布置梁的支承，可以起到降低梁上最大弯矩的作用；同时也缩小了梁的跨度，从而提高梁的强度和刚度。如图1-6-22所示受均布载荷的简支梁。若将两个支座适当向内侧移动，例如移动$l/5$，其最大弯矩都显著减小。

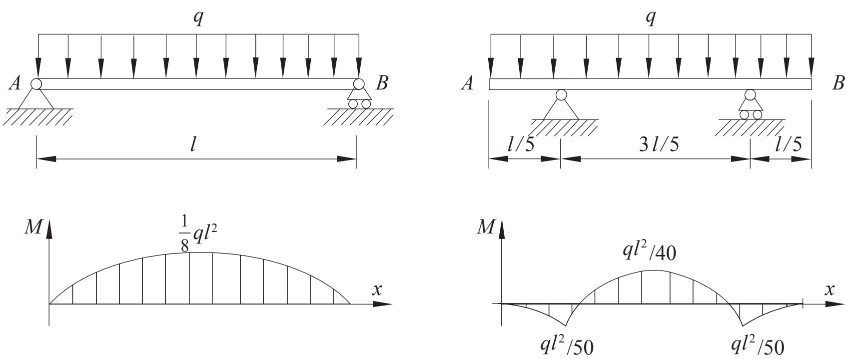


图 1-6-22 合理布置梁的支承

2. 合理布置梁上的载荷

当梁上的载荷大小一定时，合理地布置载荷可以减少梁上的最大弯矩，提高梁的强度和刚度。如图1-6-23（a）所示的简支梁上承受集中力F，集中力F的布置形式和位置不同，梁的最大弯矩也不同。因此，机械工程中的齿轮、胶带轮等都尽量靠近轴承处，以提高梁的弯曲强度。将梁上的集中载荷分散为两处靠近支座的集中力，如图1-6-23（b）所示，或用分散为均布载荷$q=F/l$的方法，如图1-6-23（c）所示，梁的最大弯矩也将显著减小，提高梁的强度和刚度。

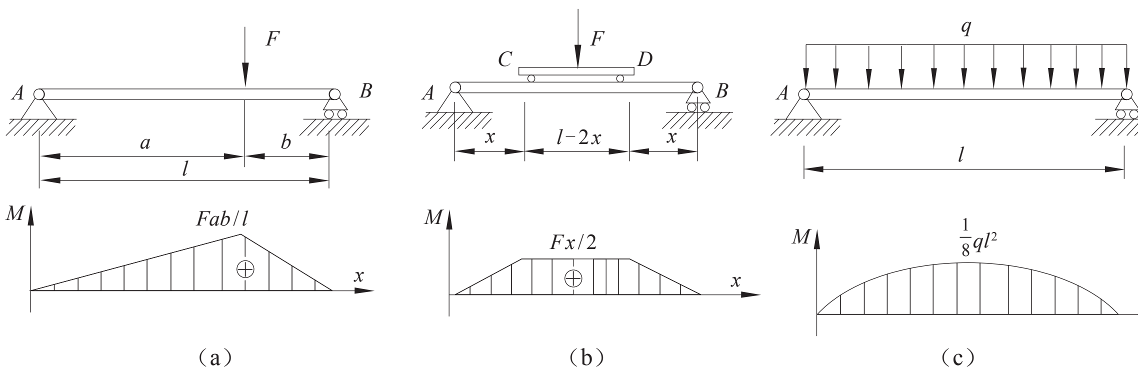


图 1-6-23 合理布置梁上的载荷

3. 合理选择梁的截面

对于平面弯曲梁，从弯曲正应力强度考虑，比较合理的截面形状是在截面面积A一定的前提下，使截面具有最大的抗弯截面系数W_z，即比值W_z/A越大，截面越经济合理，如图1-6-18所示汽车车架纵梁的截面形状及在本任务的例题都有明确的答案，即使是同一矩形截面，立放要比平放具有较大的承载能力，观察各类建筑中的梁，极大多数是立放的。

4. 采用变截面的梁

如图1-6-17所示的汽车钢板弹簧，通过弯矩图分析，梁从支点至梁的中点，弯矩逐渐增

加，靠近支点处，截面内的正应力远远小于材料许用应力。为充分利用材料，将梁的截面尺寸随弯矩而定，做成变截面的梁，使全梁达到等强度，这种梁也称为等强度梁。

任务小结

1. 平面弯曲梁的横截面上有两个内力：剪力和弯矩，掌握其正负号是按变形来规定的。
2. 正确作剪力方程与弯矩方程，正确绘制剪力图与弯矩图，寻找梁的危险截面，求解出最大弯矩$\left|M_{\max}\right|$的过程；

（1）正解地作梁的受力分析，列平衡方程，求解支座的约束反力；

（2）方法1：按梁上作用的载荷，集中力F、力偶M作用点、均布载荷q的起始点与终止点，正确地进行分段，列出各段的剪力方程与弯矩方程，绘制剪力图与弯矩图，求解最大弯矩$\left|M_{\max}\right|$。

（3）方法2：根据弯矩、剪力与载荷集度（集中力F、力偶M、均布载荷q）之间的关系，正确、简捷地绘制剪力图与弯矩图，求解出最大弯矩$\left|M_{\max}\right|$。

3. 平面弯曲梁的横截面上正应力的计算公式：$\sigma=\dfrac{My}{I_z}$

平面弯曲梁的正应力强度条件：$\sigma_{\max}=\dfrac{\left|M_{\max}\right|}{W_z}\leqslant[\sigma]$

应用梁的正应力强度条件，解决工程中强度校核、确定许用载荷、设计截面尺寸三类强度计算问题。

4. 掌握常用梁的横截面（圆形与矩形截面）对z轴的惯性矩I_z，抗弯截面系数W_z。

测试题

一、选择题

1. 如图1-6-24所示简支梁，已知作用有集中力F、集中力偶M和约束力F_A、F_B，截面1-1剪力和弯矩计算正确的是（ ）。

A. $F_{Q1}=F_A+F$　　$M_1=F_A\times x+M-F\times x$

B. $F_{Q1}=F_B$　　$M_1=F_A\times x+M-F\times x$

C. $F_{Q1}=F_A-F$　　$M_1=F_A\times x+M-F\times(x-a)$

D. $F_{Q1}=-F_B$　　$M_1=F_B\times(l-x)$

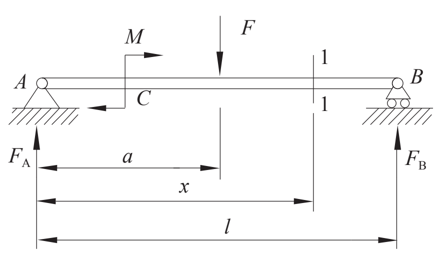


图 1-6-24

2. 直梁弯曲的正应力公式是依据梁的纯弯曲推出的，可以应用于横力弯曲的强度计算，是因为横力弯曲时梁的横截面上（ ）。
   A. 有切应力，无正应力
   B. 无切应力，只有正应力
   C. 既有切应力又有正应力，但切应力对正应力无影响
   D. 既有切应力又有正应力，切应力对正应力的分布影响很小，可忽略不计
3. 如图1-6-25所示，截面弯矩为正值的应力分布图是（ ），截面弯矩为负值的应力分布图是（ ）。

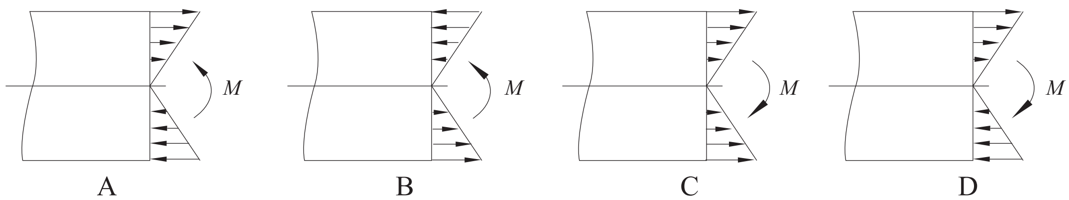


图 1-6-25

4. 对于图1-6-26所示悬臂梁指定截面的应力分布正确的是（ ）。

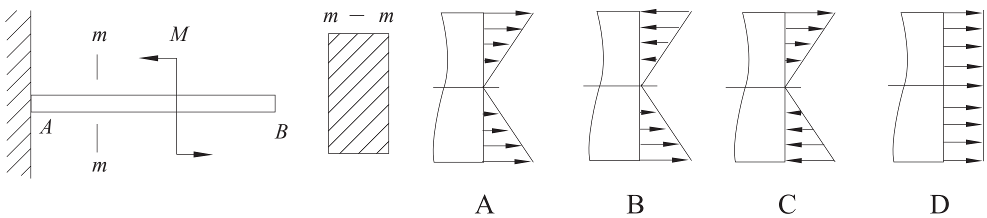


图 1-6-26

5. 梁弯曲时横截面的中性轴就是梁的（ ）与（ ）的交线。
   A. 纵向对称平面　　B. 横截面　　C. 中性层　　D. 上表面

二、判断题

1. 梁弯曲时中性轴必过截面的形心。（ ）
2. 圆截面和矩形截面，是以中性轴为对称轴的上下对称图形，弯曲时它们各自的最大拉应力和最大压应力相等。（ ）
3. 梁的横截面上作用有负值弯矩，其截面中性轴上侧各点受到压应力作用，下侧各点受到拉应力作用。（ ）
4. 当梁的长度相对于横截面尺寸较大时，剪力可不考虑，仅研究梁的弯矩。（ ）
5. 塑性材料的抗拉与抗压性能相同，宜采用上下对称与中性轴的截面形状。（ ）
6. 如图1-6-27所示的四种横截面积都相等，所以抗弯截面系数 W_z 也一样。（ ）

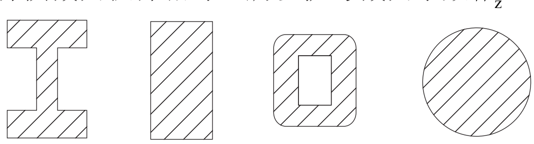


图 1-6-27

三、计算题

1. 试计算图1-6-28所示梁指定横截面的剪力和弯矩。

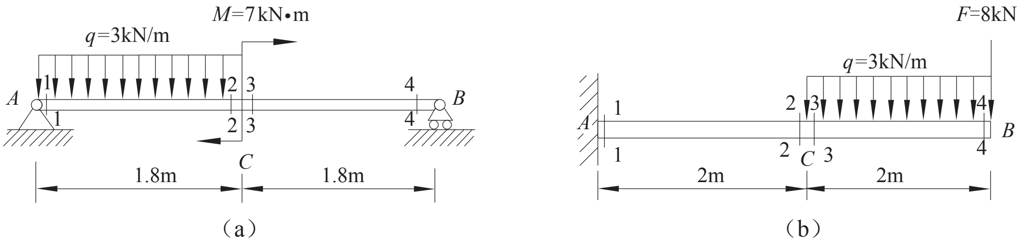


图 1-6-28

2. 试建立图1-6-29所示各梁的剪力方程和弯矩方程，剪力图和弯矩图，求最大的$|F_{\mathrm{Nmax}}|$和$|M_{\max}|$。

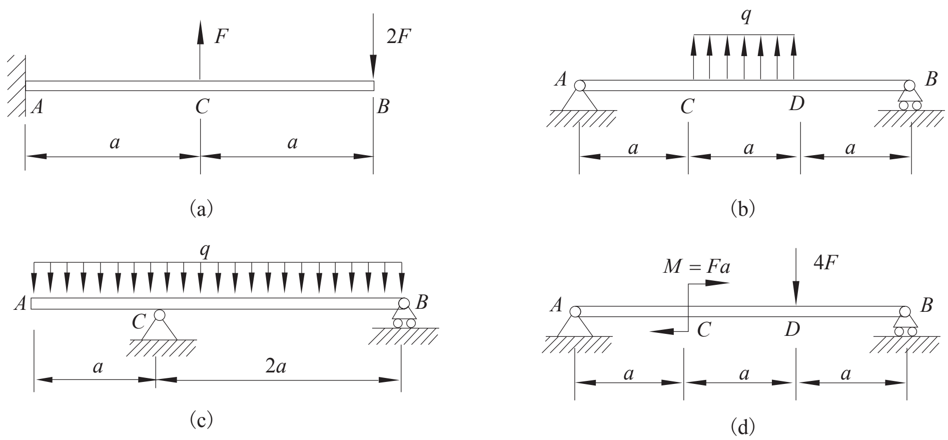


图 1-6-29

3. 如图1-6-30所示，悬臂梁受力$F=1\,\mathrm{kN}$，$q=600\,\mathrm{N/m}$，求梁在C点处横截面上a、b两点的正应力。

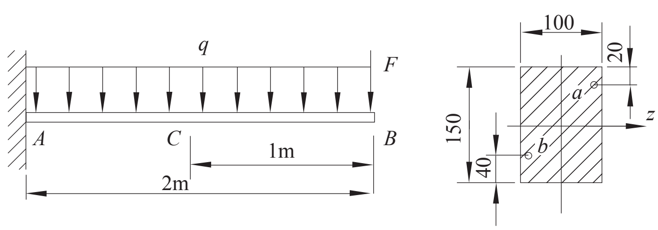


图 1-6-30

4. 如图1-6-31所示，圆形截面木梁受力$F=3\mathrm{kN}$，$q=3\mathrm{kN/m}$，许用弯曲正应力$[\sigma]=10$ MPa。试确定圆形截面木梁的直径d。

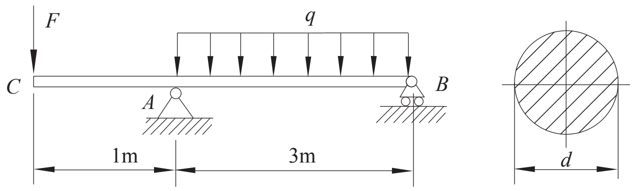


图 1-6-31

5. 如图1-6-32所示的矩形截面简支梁，材料许用弯曲正应力$[\sigma]=160\,\text{MPa}$，在截面竖放和横放时，比较其许用力偶矩M的大小。

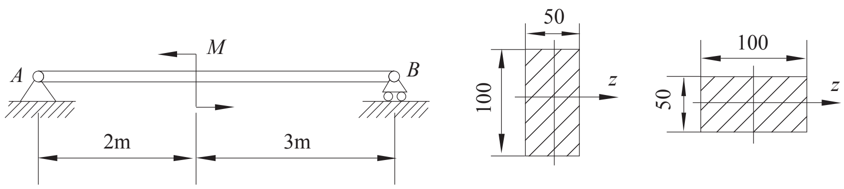


图 1-6-32